



RÉPUBLIQUE D'HAÏTI

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE (MENFP)

MODULE DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES POUR LA FORMATION PROFESSIONNELLE INITIALE DES ENSEIGNANTS DU FONDAMENTAL

Préparé dans le Cadre du Projet d'Éducation Pour Tous (EPT)

2008-2014



Préparé par :

Maxime MESILLAS

Gustave JOSEPH

Sous la Coordination de :

Norbert STIMPHIL

Pierre Enocque FRANCOIS

Wilson Fritz SAINT-FORT

Michel-Ange AUGUSTIN

Thierno Hamidou BAH, Consultant International

Sous la Supervision de :

- **La DFP (Etzer VIXAMAR chargé de la FIA et feu WALTER GÉDÉUS)**
- **La Coordination Générale de l'EPT**

Revu et corrigé en 2014 par (pour la CIEP et la FONHEP):

Yvesner MARCELIN

Achis CHERY

Claire BEAUVAIS

Introduction

Enseigner les mathématiques, c'est conduire l'élève à transformer sa représentation du monde pour aller vers plus d'abstraction. On part des quantités pour aller vers les nombres, des objets du réel vers les objets géométriques et leurs propriétés, des grandeurs vers leurs mesures. Les notions mathématiques sont construites comme modélisations du réel et réponses à des problèmes.

Les connaissances mathématiques sont d'une grande importance pour la compréhension des sciences et des techniques. Mais la culture mathématique a elle-même une grande importance dans la formation de l'individu donc dans l'éducation de l'enfant. Faire des mathématiques sert à construire la pensée logique, le raisonnement, l'habitude de la rigueur intellectuelle.

L'enseignant de l'école fondamentale a intérêt à s'appuyer le plus souvent possible sur le quotidien de l'enfant haïtien pour l'aider à construire ses savoirs mathématiques. Ces savoirs seront ainsi plus facilement utilisables puisqu'ils seront reliés dès leur apprentissage à des situations connues. De même, il faudra, à chaque fois que cela sera possible inciter les enfants à construire leurs savoirs, en estimant un ordre de grandeur, en discutant et en argumentant autour d'une solution, en vérifiant la validité par la manipulation ou le calcul. Le processus de validation d'une solution sera confié le plus possible aux élèves pour qu'ils apprennent à passer d'une validation basée sur l'expérience à un véritable processus de preuve s'appuyant sur des connaissances mathématiques et un raisonnement logique, développant ainsi une pensée logique et rationnelle.

Compétences professionnelles visées

78 heures

Le module de didactique des mathématiques vise à permettre au futur maître de :

- ✧ connaître les concepts les plus importants propres à la didactique des mathématiques : situations, obstacles, variables didactiques, prise en compte de l'erreur
- ✧ savoir mettre en place des situations d'apprentissage pour chaque notion
- ✧ être capable de tenir compte de la « construction des notions mathématiques » chez l'enfant pour construire sa progression de classe
- ✧ connaître et comprendre la progression des programmes en vigueur
- ✧ savoir interpréter les obstacles et les erreurs de ses élèves
- ✧ savoir mettre en place des situations permettant de mesurer le degré d'acquisition des compétences.

Démarche didactique développée dans le module

Pour chaque notion, le module propose de faire vivre aux étudiants-maîtres une mise en situation. Cette mise en situation sera analogue à celles que les étudiants-maîtres feront vivre à leurs élèves en salle de classe. Elle leur permettra de questionner leurs représentations des mathématiques. Elle leur fera vivre « de l'intérieur » les cheminements de la pensée pour l'acquisition d'une notion. Cette mise en situation pourra être utilisée comme activité de classe.

1. Lors de la structuration, le formateur fera le point sur les contenus en les accompagnant parfois brièvement d'apports épistémologiques et historiques. Il s'attachera surtout à éclairer l'appropriation de la notion en explorant les variables et les obstacles didactiques et épistémologiques propres à cette notion. Il proposera des activités de référence liées à cette notion.
2. Les étudiants-maîtres réaliseront des activités à destination des élèves : conceptions de situations de classe, de supports écrits, de matériels didactiques. Ces activités ont un double objectif. Tout d'abord, les étudiants-maîtres peuvent ainsi réinvestir et ancrer les notions apprises. De plus, ils se constituent aussi un premier bagage professionnel pratique, pour leurs premières années d'exercice.
3. D'autres documents sont fournis aux étudiants-maîtres pour approfondir les notions étudiées ou compléter ce bagage (textes, sites, situations de classe)

NB : Les documents du module ne devront être fournis qu'à l'issue du cours pour faciliter l'apprentissage et la mise en situation.

Domaines d'étude

Pour un volume total de 78 heures, on peut envisager la répartition suivante (à adapter en fonction du profil des étudiants-maîtres)

- ✧ Enseignement des mathématiques et didactique : 12h
- ✧ Activités numériques : 24h
- ✧ Géométrie : 18h
- ✧ Mesures : 15h
- ✧ Résolution de problèmes : 9h

1- ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES ET DIDACTIQUE

Objectifs

Dans cette partie, l'étudiant-maître va réfléchir à ses propres représentations des mathématiques et de leur enseignement, acquérir en lien avec des exemples pratiques les principaux concepts de la didactique des mathématiques, faire le lien entre le développement de l'enfant et les progressions utilisées.

Notions

Mathématiser une situation, représentation, conceptions, situations fondamentales, procédures, obstacles, variables, validation, preuve

A- DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES, THÉORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES

Objectifs de formation

- ✧ Comprendre la théorie des situations didactiques
- ✧ Comprendre la nature particulière du savoir mathématique et son rapport avec le vrai.
- ✧ Connaître la progression des capacités argumentatives et déductives des élèves entre 6 et 12 ans.
- ✧ Savoir mettre en place des situations où la validation empirique et pratique fera place progressivement à l'explication puis l'argumentation logique.

La didactique étudie le processus de transmissions des connaissances de l'enseignant vers l'élève mais aussi comment l'élève s'approprie et reconstruit ces connaissances. Ces processus d'acquisitions des savoirs sont différents selon les savoirs enseignés. Pour chaque concept mathématique, il est important de connaître la façon dont il s'est construit dans l'histoire et les problèmes qu'il permet de résoudre, pour appréhender **les obstacles** que son enseignement va susciter.

De fait, la didactique des mathématiques cherche donc aussi à créer des situations d'enseignement adéquates permettant le franchissement de ces obstacles et une transmission des savoirs.

Théorie des situations didactiques de Brousseau

Une **situation didactique** est une situation où se manifeste un projet d'enseigner. C'est l'enseignant qui met en place une situation où l'élève sera confronté à un milieu. Brousseau fait l'hypothèse que pour chaque notion à enseigner, il existe au moins une **situation fondamentale** qui sera proposée aux élèves. Cette situation est une **situation-problème**. La notion à acquérir est l'outil privilégié pour la résoudre. L'élève va construire la notion en résolvant le problème. En faisant l'analyse épistémologique et didactique de la notion, on peut étudier **les obstacles** que va rencontrer l'élève et faire varier cette situation fondamentale pour l'aider à franchir ces obstacles.

Pour l'élève, l'enjeu est de résoudre le problème et de prouver la validité de sa solution. La finalité d'enseigner un savoir donné n'est pas première pour lui même s'il sait que c'est le projet de l'école. On dit qu'il vit une **situation didactique** qui est à l'intérieur de la situation didactique mise en place par l'enseignant. L'enseignant cherchera à lui laisser une grande marge d'initiative pour qu'il prenne la responsabilité de cette résolution et soit véritablement acteur.

1- Mise en situation des élèves-maîtres

Par groupe, les étudiants-maîtres cherchent à répondre à ces questions :

- ✧ Si on additionne 2 nombres pairs, obtient-on toujours un nombre pair, ?
- ✧ Si on additionne 2 nombres impairs, obtient-on toujours un nombre pair ?
- ✧ Si on additionne 2 nombres quelconques, obtient-on toujours un nombre pair ?

Comment pouvez-vous prouver vos réponses ?

Généralement, les participants commencent par faire des essais et constater, pour les deux premières questions, que tous leurs résultats sont pairs. Ils font alors la conjecture que cela est vrai dans tous les cas d'additions de 2 nombres pairs ou de 2 nombres impairs.

Pour la 3^{ème} question, il arrive fréquemment que les enfants considèrent que les exemples qu'ils ont choisis suffisent et que cela doit marcher quel que soient les nombres. Cela arrive aussi en première réaction chez les adultes mais les démentis du groupe (généralement des contre-exemples) suffisent à remettre cette conception en question.

2- Structuration par le formateur

Les réponses aux questions sont facilement trouvées par les stagiaires. Le formateur s'attachera à faire ressortir dans la mise en commun les formulations utilisées et la manière dont le processus de preuve s'est construit.

- ✧ **1er niveau de preuve** : la constatation empirique que « ça marche toujours » quels que soient les nombres choisis.

Le formateur peut faire approfondir la réflexion en posant des questions.

Est-ce une preuve ? Non, à ce stade, ce n'est qu'une conjecture, cela ne se base que sur des exemples. Il faut chercher un argument qui généralise cette expérience.

- ✧ **2ème niveau de preuve** : raisonnement basé sur les propriétés des nombres.

« On peut mettre les nombres pairs en paquets de 2, on met le 1er nombre en paquets de 2 et on met le 2ème nombre aussi en paquets de 2 donc si je les mets ensemble, j'aurai des

paquets de 2 donc un nombre pair. Pour les nombres impairs, c'est pareil mais à chaque fois, il reste un, je mets un et un ensemble et ça me fait un nouveau paquet de 2 » . (formulation réelle d 'élève)

Malgré la formulation enfantine et le fort appui sur les objets matériels, on reconnaît les propriétés mathématiques des nombres qui peuvent être mis sous la forme $2n$ (nombres pairs) et $2n+1$ (nombres impairs).

La dernière question ne donnera probablement pas avec des adultes des résultats erronés. (Ce n'est pas impossible). Si cela arrivait, ce serait l'occasion de faire débattre le groupe et de mettre en valeur le rôle du contre-exemple qui est le démenti qui surgit en premier. « Ce n'est pas vrai, l'addition de $7+4$ donne un nombre impair ». De plus, la formateur pourra à cette occasion faire ressortir la non-validité d'une preuve fondée uniquement sur des exemples. S'il n'y a pas de résultats erronés, le formateur fera ressortir les mêmes points en faisant réfléchir sur la preuve fournie (ici le contre-exemple) suffisant pour contredire une affirmation et la nécessité, si on veut dégager une loi générale d'étudier tous les cas et d'être sûr d'avoir étudié tous les cas (somme de 2 nombres pairs, somme de 2 nombres impairs, somme d'un nombre pair et d'un nombre impair).

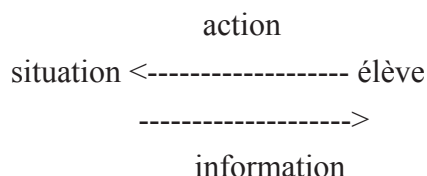
3- Apports

Les temps du processus d'apprentissage

✧ Situation d'action

Elle pose à l'élève un problème dont la meilleure solution est la connaissance visée. Elle lui permet d'agir sur ce problème. Elle lui renvoie des informations immédiates sur l'effet de son action.

On pose à des élèves de 4ème AF la question : Peut-on tracer un triangle avec deux angles droits ? Les élèves cherchent en traçant de différentes manières.



✧ Situation de formulation

Dans le groupe de travail, l'élève explicite son action. Il communique avec ses camarades en langage naturel ou mathématique. **La verbalisation** (le fait de mettre des mots sur son action) permet une avancée vers **la conceptualisation**. Le travail autour des messages échangés (oraux ou écrits) est très riche car il oblige l'élève à expliciter ce qu'il perçoit de manière implicite.

Les élèves formulent entre eux l'impossibilité : « ce n'est pas possible, ça monte tout droit, on ne peut pas fermer, on ne peut pas avoir une équerre avec deux angles droits » exemples de formulations réelles d'élèves.

✧ Situation de preuve (ou de validation)

Le groupe d'élèves va devoir prouver à la classe que sa solution est vraie. Cette validation peut être réfutée par les autres élèves. Le groupe doit proposer un modèle valable en utilisant un raisonnement logique et des **propriétés mathématiques**.

« Ce n'est pas possible parce que si on a deux côtés qui forment un angle droit, au bout d'un des côtés, on trace un autre angle droit. Les deux côtés qui restent sont parallèles parce qu'ils font un angle droit avec le premier côté » (formulation réelle d'élève.)

Cette **validation** est correcte même si elle utilise le langage naturel (bout au lieu d'extrémité) et qu'elle est maladroite (elle n'utilise pas la facilité de nommer les côtés). La propriété mathématique qui prouve l'impossibilité est bien énoncée.

✧ Situation d'institutionnalisation

Au terme de ces trois étapes, une notion a été dégagée. L'enseignant doit **décontextualiser** (sortir du contexte) la notion obtenue et en faire un objet de savoir officiel.

L'institutionnalisation est le passage pour une connaissance de son rôle de moyen de résolution d'une situation d'action, de formulation ou de preuve, à un nouveau rôle, celui de référence pour des utilisations futures, collectives ou personnelles. Brousseau

La plupart du temps, cette connaissance découverte peut faire l'objet d'une **trace écrite** dans un cahier de leçons.

Trace écrite

Après une situation de découverte, il est intéressant que les élèves gardent quelque chose écrit dans un cahier de leçons pour leur rappeler ce qu'ils viennent d'apprendre. Ce cahier peut être utilisé comme aide dans les moments de réinvestissement de ce qui est appris.

Cette description est schématique pour faire comprendre **les processus d'apprentissage**. Dans la pratique, il y a de nombreux allers-retours entre les phases. Pour les élèves les plus jeunes, la formulation est toujours recommandée mais elle sera plus maladroite et fixée sur l'action. La validation sera empirique, basée sur l'expérience.

A l'école fondamentale, on ne cherche pas encore une démonstration qui est un raisonnement formel se basant sur des axiomes admis ou des théorèmes démontrés. Ce niveau de formalisation n'est pas accessible à des enfants de cet âge même s'il s'agit d'un objectif à long terme pour l'enseignant. En effet, c'est l'habitude de douter et éventuellement de chercher à réfuter, de devoir prouver au lieu d'affirmer, de vérifier les liens logiques entre les étapes du raisonnement, qui construit la capacité à démontrer.

Ces situations de découverte d'une notion seront suivies d'**exercices d'application et de réinvestissement** pour consolider la notion découverte.

Exercices d'application

Ils sont effectués après la situation de découverte. Ils peuvent être effectués le même jour ou, plus souvent, faire l'objet de plusieurs séances d'exercices d'application. Ces séances ont lieu dans les jours qui suivent. On peut, à plus grande distance dans le temps faire des séances où les élèves feront plusieurs exercices d'application liés à des notions différentes. Souvent, ces exercices d'application vont aboutir à **automatiser des savoir-faire**.

Exemple

Savoir extraire la partie entière d'une fraction donnée (6ème AF) . Cet objectif fera l'objet d'une ou plusieurs séances de découverte à l'intérieur d'une séquence sur les fractions. Ces séances comprendront des situations-problèmes et utiliseront plusieurs représentations des fractions (disques, bandes, droites graduées). Les élèves, ayant compris la notion acquerront progressivement une méthode qui aura de moins en moins besoin de s'appuyer sur ces représentations. (on pourra y revenir en cas de difficultés) Cette méthode deviendra automatique.

Exercices de réinvestissement

Ils sont effectués après la séance de découverte. On peut aussi les proposer à tous moments du cursus scolaire à distance de l'apprentissage. Ils ne sont pas une application stricte de la notion mais comportent une part de recherche. La situation proposée n'est pas du même genre que la situation de découverte : l'élève va devoir **transférer ses connaissances**.

La question du langage

La question du langage est au cœur de la construction du processus de preuve. Dans la situation d'action, le langage, s'il accompagne l'action, **construit la pensée**. La demande de verbalisation adressée à l'élève se justifie ici.

Le langage utilisé dans les moments de mise en commun ou de validation est d'abord un **langage spontané et naturel**. L'élève utilise le langage qu'il maîtrise. C'est l'exigence de précision apportée par la situation de débat qui va faire naître la nécessité d'un **langage plus élaboré**.

Le rôle de l'enseignant est d'abord d'accueillir et de favoriser ces formulations spontanées, de ne pas exiger trop tôt une formalisation dont l'élève n'est pas capable. Il peut s'attacher à repérer le raisonnement et la preuve mathématique contenus dans une formulation maladroite et aider l'élève à l'exprimer. C'est souvent un questionnement bien conduit et adapté à l'évolution de l'enfant qui va le faire progresser : « comment as-tu fait ? » mais aussi « peut-on être sûr ?, qu'est-ce qui le prouve ? »

Le langage naturel utilisé sera d'abord basé sur **la perception** (le parallélogramme est un rectangle penché) et personnel. Il s'appuiera ensuite sur **des propriétés mathématiques** mais la définition est souvent incomplète et partiellement exacte (le parallélogramme est un quadrilatère qui a des côtés égaux et pas d'angles droits). A ce stade, la communication entre pairs (entre élèves) va obliger à tout dire et à être précis se rapprochant ainsi du véritable **langage mathématique**. Cette perte de temps n'en est pas une car la recherche de la formulation a été aussi **la construction du concept**.

B- LES MATHÉMATIQUES : DU CONCRET VERS L'ABSTRAIT

Objectifs de formation

Comprendre que l'enseignement des mathématiques va conduire l'élève d'une **représentation concrète** à une représentation plus **abstraite**. Ce processus sera progressif et s'appuiera sur les représentations actuelles des élèves pour les faire évoluer.

1- Mise en situation des élèves-maîtres:

Proposer le problème suivant :

Problème des poules et des lapins : Dans un poulailler, il y a des poules et des lapins. On peut compter 7 têtes et 20 pattes. Combien y a-t-il de poules ? Combien y a-t-il de lapins ?

Demander aux élèves-maîtres de se mettre par groupes de 3 ou 4. Leur préciser que toutes les formes de solutions sont possibles : manipulations d'objets, dessins, calculs. Demander de présenter leurs solutions sur affiches en laissant les traces de leurs recherches.

Après un temps de recherche, afficher toutes les productions, en classant les procédures des plus concrètes aux plus abstraites. Demander à chaque groupe de venir expliquer sa procédure.

Ce problème, qui fait appel à un domaine numérique peu élevé va dérouter les élèves-maîtres car l'opération à utiliser n'apparaît pas immédiatement. Les adultes comme les enfants le résolvent souvent par une méthode d'essais-erreurs en utilisant la manipulation d'objets, les schémas, les calculs. Diverses procédures sont possibles.

La solution experte (système d'équations à 2 inconnues) est peu utilisée spontanément.

2- Structuration par le formateur. Apports

Faire verbaliser aux membres de chaque groupe les étapes de leur recherche. Les interroger sur la représentation du problème qu'ils ont construite, la procédure qu'ils ont mise en œuvre, les erreurs et impasses qu'ils ont rencontrées et le chemin qu'ils ont pris pour en sortir.

Faire s'exprimer le grand groupe sur l'expérience vécue au cours de cette mise en situation. Quelles étapes sont nécessaires ? Quel est le rôle du groupe ? Quels sont les ressentis ?

Que peut-on retenir de cette expérience ? Apports du formateur

Les procédures : Chaque groupe a utilisé une procédure différente. Pourquoi ?

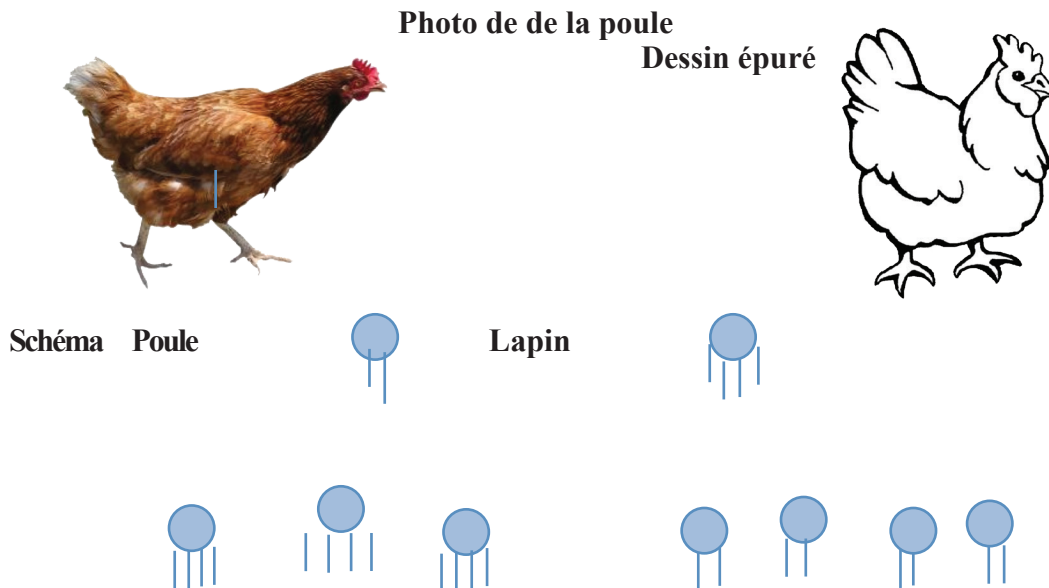
Une procédure est une méthode utilisée pour résoudre un problème. Il existe toujours plusieurs procédures pour résoudre un même problème. L'élaboration de procédures, la compréhension de procédures élaborées par d'autres et surtout la compréhension de l'équivalence des procédures ont une grande place dans la construction des savoirs mathématiques.

Les représentations : Les représentations obtenues sont différentes. Certaines font appel au réel (objets manipulés), d'autres s'appuient sur le dessin ou le schéma, d'autres représentent la

situation par des signes (mots et/ou nombres).

Une représentation est une façon de donner corps et présence à une situation ou à une notion. Ce n'est pas la situation elle-même. Les dessins de poules et de lapins ne sont pas les poules et les lapins.

Les représentations gardent plus ou moins de caractères de la réalité. Un objet manipulable est plus proche du réel qu'une représentation sur papier. Sur le papier, le dessin cherche à représenter l'objet alors que le schéma ne garde que les traits pertinents.



La représentation mathématique $(3 \times 4) + (4 \times 2)$ est équivalente au schéma.

Ces diverses représentations pourraient être classées de la plus concrète à la plus abstraite.

Dans cette situation, nous n'avons retenu que les caractéristiques utiles pour résoudre le problème et nous en avons dégagé un modèle mathématique : nous avons mathématisé une situation.

Le processus d'abstraction consiste à passer du particulier au général, à abstraire (enlever) les traits particuliers, à construire un modèle et à le représenter par des symboles.

Les représentations de l'enfant partent du réel car elles lui permettent de l'expliquer. Un enfant a par exemple beaucoup de mal à schématiser, il va chercher à dessiner l'objet réel avec ses détails. Il aura du mal à extraire les caractéristiques mathématiques de la situation (ici, le nombre de têtes et de pattes). L'objet manipulable l'aide à se représenter et à agir sur la situation.

Ce n'est que très progressivement que l'enfant, avec l'aide de l'enseignement va remanier ses représentations pour arriver à des représentations plus abstraites.

L'enseignant devra tenir compte de cette évolution liée au développement de l'enfant. La construction de la notion de nombre est un processus d'abstraction difficile car l'enfant doit comprendre que 5 peut représenter, 5 bananes, 5 garçons, 5 arbres et que c'est la propriété commune à toutes ces collections.

Cette notion sera revue en détail au cours des parties du module portant sur les domaines disciplinaires.

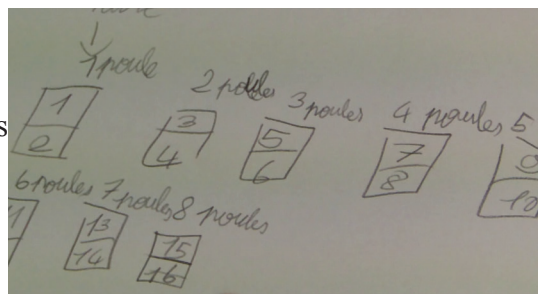
3- Activités de réinvestissement par les élèves-maîtres

✧ Inventer une situation dont la représentation par le calcul sera $(3 \times 9) - 8$

✧ Analyser le schéma d'élèves ci-contre.



✧ Quels sont les 2 types de représentations visibles sur cette feuille ?



4 - Mise en situation des élèves-maîtres (liée à la géométrie)

Demander aux élèves-maîtres, par groupes de 3 ou 4 de dessiner un mur avec des fenêtres de leur salle de formation.

Afficher les dessins, les faire comparer et commenter. Faire verbaliser les procédures mises en œuvre pour réaliser ces dessins.

Ce deuxième exemple, pris cette fois dans le champ de la géométrie et des grandeurs va mettre en évidence le passage de la **représentation liée à la perception immédiate à la représentation respectant les règles des propriétés géométriques**.

- ✧ A-t-on repéré les formes à dessiner à partir de formes connues (carrés, rectangles) ?
- ✧ Cette détermination est-elle basée sur une estimation ou sur une mesure ?
- ✧ La place des objets (fenêtres, porte) dans le grand rectangle (mur) a-t-elle été estimée ou mesurée ?
- ✧ De quels outils s'est-on servi pour mesurer ou estimer ? (mètre, ficelle, main, estimation de la largeur de la fenêtre ...)
- ✧ A-t-on établi une échelle de réduction ?

La progression en géométrie et dans le domaine des grandeurs va partir de la perception du réel pour le définir et l'interpréter sous forme d'objets géométriques dont on définira progressivement les propriétés.

C- OBSTACLES, GESTION DE L'ERREUR, VARIABLES DIDACTIQUES

Objectifs de formation

Comprendre la nature des divers obstacles : obstacles épistémologiques et obstacles didactiques et leur place dans la construction des connaissances, savoir analyser les erreurs comme la manifestation de ces obstacles, savoir utiliser les variables didactiques pour aider les élèves à franchir les obstacles et pour permettre une différenciation dans le rythme des apprentissages.

1- Mise en situation des élèves-maîtres

Divers exercices sur la symétrie sont proposés aux élèves-maîtres. (symétrie horizontale, symétrie verticale, symétrie oblique, supports quadrillés, papier pointé, blanc, segments suivant les traits de quadrillage ou non, diverses consignes : reconnaissance, tracés de figures, tracés d'axes de symétrie)

- ✧ Appréciez le degré de difficulté (pour vous) de chacun de ces exercices. Comment faites-vous pour réaliser cet exercice ?
- ✧ Comment feriez-vous pour le rendre plus facile (plus difficile) ? Est-ce que ça changerait la façon de le réaliser ?
- ✧ Quelles sont les erreurs probables pour chacun de ces exercices ?

2- Structuration par le formateur

Chacun de ces exercices met en évidence **une variable**. Ces variables peuvent être classées en catégories :

- ✧ Le support de travail peut être uni, quadrillé ou en papier pointé. Les supports non unis sont une aide au repérage de l'élève. Le quadrillage découpe le plan en petits carrés dont le symétrique de chacun peut être repéré en comptant verticalement et horizontalement. Le papier pointé incite à une stratégie de repérage des sommets de la figure. Le papier uni oblige à une vérification des distances et de l'orthogonalité par rapport à l'axe de symétrie.
- ✧ L'orientation verticale de l'axe de symétrie est la situation la plus facile car elle correspond à une situation très connue implicitement de l'élève qui est la symétrie du corps humain. Les situations de symétrie avec un axe horizontal vont nécessiter un recul par rapport à l'image mentale construite précédemment. L'axe de symétrie oblique est la situation la plus abstraite des trois car les repères d'orthogonalité se construisent implicitement par rapport aux bords de la feuille.
- ✧ La position des figures par rapport à l'axe joue un rôle. Les figures « coupées » par l'axe de symétrie sont plus faciles à concevoir car plus proches de l'image mentale de base que les figures à distance. Les figures qui ont principalement des segments parallèles ou perpendiculaires à l'axe de symétrie ne posent pas de problèmes de mesure d'angles
- ✧ L'exercice peut porter sur un tracé de figure symétrique par rapport à un axe (difficile sur papier blanc), sur la reconnaissance ou le tracé d'axes de symétrie sur une figure. Certaines figures comme le parallélogramme ou le rectangle posent des difficultés dans la reconnaissance des axes de symétrie. Le rectangle n'a que deux axes de symétrie, ses diagonales

ne sont pas axes de symétrie même si elles découpent le rectangle en deux triangles isométriques. Le parallélogramme quelconque n'a aucun axe de symétrie. Le parallélisme et l'isométrie sont souvent confondus avec la symétrie.

L'utilisation de ces variables va changer la réponse de l'élève à la situation proposée par l'exercice. Certaines **erreurs** (confusion avec la translation, tracé comme si l'axe était vertical alors qu'il est horizontal ou oblique, confusions entre les régularités des figures et les axes de symétrie) se répètent car elles sont liées à la **construction de la notion** elle-même.

3- Apports

✧ Obstacles et erreurs

Une connaissance construite par un élève est le résultat d'une **adaptation** de cet élève à une situation. Si l'on observe la construction des connaissances mathématiques dans les sociétés, on constate que cette construction s'est accompagnée d'**obstacles** liés à la notion elle-même et à son intégration au sein des connaissances existantes. L'étude de ces obstacles permet d'analyser l'évolution historique d'un concept mais aussi la construction de ce concept par l'élève.

✧ Obstacles épistémologiques

Dans l'histoire de l'humanité, une notion se construit progressivement. Le nombre par exemple a d'abord été utilisé pour mesurer des quantités d'objets (animaux d'un troupeau). Un **obstacle épistémologique** s'est présenté quand on a voulu utiliser ce nombre pour mesurer des grandeurs : les nombres entiers ne convenaient plus. Progressivement s'est dégagée la notion de fractions puis de décimaux. Cette nouvelle notion a nécessité de remettre en cause la représentation et le fonctionnement des nombres fondés uniquement sur les entiers.

✧ Obstacles didactiques

Parfois, c'est l'enseignement qui lui-même ajoute des obstacles en induisant de **fausses représentations**. L'origine en est souvent une procédure qui a été automatisée trop tôt, avant sa compréhension. Par exemple, pour comparer des nombres décimaux, on insiste à tort sur la nécessité de les ramener au même nombre de chiffres après la virgule.

Pour comparer 3,4 et 3,295 on demande à l'élève de transformer 3,4 en 3,400 puis de comparer 295 et 400. On renforce ainsi l'idée que les parties entières et décimales d'un nombre sont comme deux nombres collés l'un à l'autre au lieu d'insister sur le rapport de multiplication par 10 entre chacun des chiffres (des deux parties). L'élève se souvient qu'il faut comparer séparément et fait l'erreur de dire « 4 est plus petit que 295 ». Il est plus utile de travailler dès le début à reconnaître le 4 de 3,4 comme 4 dixièmes qui est plus grand que les 2 dixièmes de 3,295. La réussite à l'exercice de classement sera peut-être moins rapide qu'en utilisant la recette des zéros mais on évitera de créer de fausses notions.

✧ Erreurs

L'adaptation remet en cause des modèles existants et cette remise en cause s'accompagne d'obstacles car les modèles anciens devenus inadéquats persistent

Ces obstacles provoquent des erreurs qui se répètent quels que soient les élèves. Ces erreurs sont le résultat de leurs conceptions. Il y a une relation entre les **obstacles historiques** et les **obstacles d'apprentissage**.

Dans un certain contexte, une connaissance peut produire une réponse adaptée. Un enfant peut avoir une conception de la symétrie qui s'exprimerait ainsi : un axe de symétrie est vertical et coupe un objet en deux parties égales. Cette conception sera adaptée dans les contextes les plus fréquents avant son entrée à l'école (corps humain, fenêtres,...) Mais elle donne des réponses fausses dans les nouvelles situations, par exemple axe de symétrie horizontal ou oblique. L'élève va devoir redéfinir sa conception de la symétrie et prendre conscience de l'inexactitude de son ancienne conception. C'est **l'étude d'erreurs** qui renseigne l'enseignant sur la nature des obstacles.

✧ Variables didactiques

La remise en question des anciennes conceptions doit être réelle pour permettre leur dépassement. L'enseignant fait varier les situations pour aider à franchir ces obstacles et non à les éviter. Les **variables didactiques** vont obliger à des changements de stratégie qui permettront de franchir l'obstacle.

Diverses sortes de variables :

- liées à l'organisation pédagogique : travail en collectif, en binômes, en groupes, individuel
- liées à la consigne (suivant la question posée, langage naturel ou mathématique, présence ou non de questions intermédiaires)
- liées aux supports et aides (quadrillage, papier pointé mais aussi objets à manipuler ou non, possibilité de dessiner,...)
- liées au domaine numérique : une notion peut être abordée de façon empirique ou à l'aide de manipulations quand les nombres sont petits, employer des nombres plus grands va obliger à un changement de stratégie)
- liées aux nombres employés : les nombres peuvent être plus ou moins faciles à utiliser (multiples, de 10, de 50, de 25...), la soustraction $112 - 15$ ne va pas induire la même technique que la soustraction $112 - 98$, la présence de nombres décimaux va changer l'appréhension du problème

Cette liste de variables n'est pas du tout limitative. Les variables à considérer dépendent de chaque situation et donc de chaque notion.

Activité de réinvestissement

Faites varier le problème suivant en utilisant le plus de variables possibles. Imaginez les stratégies utilisées par les élèves avec chacune des variables.

Une famille a deux réservoirs d'eau de pluie, un de 118 litres et l'autre de 76 litres. Elle consomme chaque jour 22,5 litres.

Pour combien de jours a-t-elle de l'eau s'il ne pleut pas ?

2- ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE DES ACTIVITES NUMERIQUES

Objectifs

Dans cette partie, l'élève-maître va comprendre la construction de la numération : la connaissance des nombres comme outils pour dénombrer, mémoriser et transmettre des quantités, la dénomination de ces nombres et leur écriture dans une numération de position, la nécessité de créer de nouveaux nombres « entre les entiers » (fractions et décimaux) pour rendre compte tout d'abord de mesures puis de valeurs plus abstraites. Il va réfléchir aux obstacles créés par l'établissement de ces notions chez l'enfant et aux situations didactiques qui vont l'aider à franchir ces obstacles.

Il va étudier comment les enfants s'approprient les différentes opérations de base (addition, soustraction, multiplication, division), leur sens, les situations auxquelles elles s'appliquent et les liens qui existent entre elles.

Notions et mots/clés

Dénombrement, correspondance terme à terme, comptine numérique, groupements-échanges, numération de position, complémentation, réunion, addition répétée, division-quotition, division-partition

A – NOMBRES ENTIERS : CONSTRUCTION DU NOMBRE ET SYSTEME DECIMAL

Construction du nombre

1- Mise en situation des élèves-maîtres

Le formateur réunit divers matériels:

- ✧ cailloux, capsules de bouteilles
- ✧ boîtes à oeufs
- ✧ cartes représentant les constellations du dé de ce type (dessins à inclure)
- ✧ cartes représentant les constellations des doigts
- ✧ cartes des 10 premiers nombres en écriture chiffrée
- ✧ carte des 10 premiers nombres en cartes à points

Travail de groupes : Chaque groupe choisit un ou deux matériels et construit une activité permettant de travailler la connaissance et l'utilisation des 10 premiers nombres.

2- Structuration par le formateur

Le formateur regroupe et commente les situations proposées similaires.

✧ Situations de comptage

L'enseignant donne une collection d'objets aux élèves et leur demande de les compter : apprentissage et utilisation de **la comptine numérique**

✧ Situations de mise en relation de 2 représentations du nombre

Écritures **symboliques** (représentations du dé ou des doigts) et collections, écriture chiffrée et collections, écritures symboliques entre elles. L'enseignant présente une représentation et demande aux élèves d'en fournir une autre, l'enseignant présente une collection d'objets et demande l'écriture chiffrée ou symbolique correspondante, l'enseignant présente une écriture chiffrée ou symbolique et demande de réunir la collection d'objets correspondante.

Deux types de situations sont moins souvent évoquées par les élèves-maîtres. Pourtant, elles sont essentielles et interviennent en premier dans l'enseignement puisqu'elles travaillent sur la quantité avant le nombre et la construction du rapport entre la quantité et le nombre.

✧ Situations de mise en relation de collections

Cailloux avec capsules, cailloux dans les boîtes à œufs. L'enseignant travaille sur les quantités (plus, moins, autant) et la correspondance à terme pour construire des collections équipotentes (de même quantité).

✧ Situation de mise en relation de la quantité et du nombre

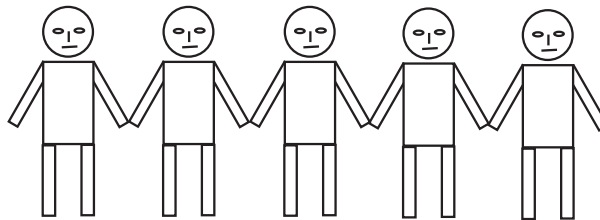
L'enseignant travaille sur les écritures symboliques (dés, doigts, cartes à points) et demande aux élèves de réunir une collection d'objets avec « autant de cailloux que de points sur le dé ».

3- Apports

✧ Qu'est-ce qu'un nombre ?

Un nombre permet de représenter, de mémoriser, de communiquer une quantité : **aspect cardinal**.

Le nombre est **un concept**. Ce n'est pas un objet. Ce n'est pas la propriété d'un objet comme d'être rouge ou petit. C'est la propriété des collections constituées du même nombre d'unités. La collection « 5 bananes » est constituée de 5 unités comme la collection « 5 enfants ». Les collections ayant le même cardinal peuvent être appariées, c'est à dire mises en paires (un enfant avec une banane). On parle de **correspondance terme à terme**.



Le nombre permet aussi de repérer une position dans une suite ordonnée (numérotation) : **aspect ordinal**. Le nombre est à la rencontre de l'ordinal et du cardinal.

Les jeunes enfants ont une conscience de la quantité. Les quantités « 1 », « 2 » et parfois « 3 » sont reconnues sans apprentissage particulier et sans avoir besoin de compter dès l'âge de 3 ans.

Quand le jeune enfant commence à savoir compter, il est beaucoup plus dans l'aspect ordinal que dans l'aspect cardinal : il donne un nom à chaque objet en comptant « 1 », « 2 », « 3 », « 4 », « 5 ». Il n'a pas tout de suite conscience qu'il a dénombré la quantité « 5 ». Le comptage n'est pas encore un outil pour dénombrer.

Les premières activités se font autour de la quantité avant de travailler sur le nombre. Toutes les activités de correspondance terme à terme vont permettre aux enfants de comprendre que les collections peuvent avoir la même quantité d'objets ou bien de comparer des collections ; il y en a plus, il y en a moins, il y en a autant.

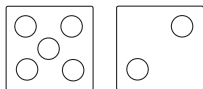
- ✧ Nous avons vu que le nombre est un concept. Pour faciliter le travail sur ce concept, on le représente.

Il existe **diverses représentations du nombre**.

Un mot-nombre Sept

Une collection

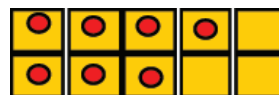
Des dés



Des doigts



Une carte à points



Une écriture chiffrée : 7

Des cailloux :



Ces représentations n'ont pas toutes **le même degré d'abstraction**.

- ✧ Les collections-témoins sont faites d'objets réels
- ✧ Dans les constellations dessinées, le réel est représenté.
- ✧ Dans les constellations organisées (doigts, dés), la quantité est encore présente (nombre de doigts ou de points) mais on s'habitue à reconnaître le nombre représenté globalement.
- ✧ Ecriture chiffrée : le réel n'est plus visible : le signe n'est qu'une convention, le signe 7 pourrait être le signe 5.

Le mot-nombre a une place à part car il est aussi une convention. Nous avons vu qu'au début de l'apprentissage, il ne code pas la quantité mais nomme l'objet. Mais les enfants le connaissent bien car il fait partie de leur langage courant.

Ces différentes représentations sont introduites successivement avec les élèves. **Le mot-nombre** est introduit avec les activités de comptage en veillant à ce que les élèves disent le mot en pointant l'objet.

Les constellations organisées (doigts et constellations du dé) sont très utiles. En effet, la constellation du dé est aussi une collection qui permet la correspondance terme à terme : « il y a autant de points sur le dé (5) que de bananes ». Ces constellations vont permettre de passer des activités de correspondance terme à terme aux activités sur le nombre.

Progressivement, l'enfant reconnaîtra d'un seul coup d'oeil les constellations sans compter chaque unité. Il les verra comme des signes, il sera alors prêt à comprendre l'écriture chiffrée.

L'écriture chiffrée peut paraître très abstraite aux enfants car un seul signe (ici le 7) représente plusieurs objets ce qui n'est pas le cas dans les constellations des doigts ou du dé (7 points représentent 7 objets). Il est utile de s'appuyer sur les constellations des doigts ou du dé pour sécuriser les élèves.

Il est important d'utiliser **plusieurs représentations du nombre** et d'habituer l'enfant à passer d'une représentation à une autre pour qu'il ne confonde pas le nombre et sa représentation. Certaines représentations mettent en valeur certaines propriétés des nombres.

Constellation des doigts (7) : met en valeur 7 comme $5+2$ (repérage à 5)

Carte à point (7) : met en valeur 7 comme $4+3$ (double +1)

Situation fondamentale du nombre

C'est une situation qui va conduire l'enfant à utiliser le nombre comme un outil pour manipuler des quantités. On n'est plus dans la correspondance terme à terme car on met une distance entre les 2 collections. On réunit une collection et on demande à l'enfant d'aller chercher la même quantité d'objets d'une autre collection en un seul voyage. Par exemple : « il y a des cailloux sur la table, va chercher autant de capsules qu'il y a de cailloux, il faut une capsule pour chaque caillou » il ne peut plus faire de correspondance terme à terme pour appairer ces 2 collections, c'est lui qui va se saisir de l'outil « nombre » pour conceptualiser cette quantité et choisir de compter. L'enseignant ne lui demande pas.

4- Progression – Obstacles et variables

Quelle progression (jusqu'à 10) ?

- ✧ Activités de correspondance terme à terme
- ✧ Activités de comptage pour apprendre la comptine numérique

Ces deux types d'activités seront menés parallèlement.

- ✧ Activités de correspondance terme à terme en utilisant les constellations organisées et en les nommant (prendre autant de cailloux que de points sur le dé)
- ✧ Activités de comptage en partant d'un autre nombre que 1 ou comptage à rebours (à l'envers) pour être à l'aise dans la file numérique
- ✧ Travail sur les différentes représentations du nombre y compris l'écriture chiffrée. Passer d'une représentation à une autre.
- ✧ Situation fondamentale du nombre

Obstacles liés à la construction du nombre

- ✧ difficulté à voir le nombre comme une représentation de la quantité (aspect cardinal) alors qu'il est vu comme un numéro (aspect ordinal)
- ✧ difficulté à comprendre l'écriture chiffrée où un signe représente plusieurs objets

Variables didactiques

- ✧ face à une petite collection (moins de 4) , faire compter (favorise l'aspect ordinal) ou faire reconnaître globalement (favorise l'aspect cardinal)
- ✧ dans la situation fondamentale du nombre, éloigner la collection d'objets (oblige à se servir du nombre et plus de la correspondance terme à terme)
- ✧ utiliser les constellations du dé ou l'écriture chiffrée
- ✧ placer les objets à ramener dans des boîtes fermées à choisir avec une étiquette chiffrée.

5 - Activité de réinvestissement par les élèves-maîtres

- ✧ Chaque groupe choisit un type d'activité et prépare un jeu mathématique qu'il peut mettre en place pour des élèves de 1ère année. Il utilise des variables pour provoquer des changements de stratégie.

Système décimal et numération de position

1- Mise en situation des élèves-maîtres

- ✧ Avec le matériel de numération

Matériel nécessaire : cailloux, petites capsules bleues, grandes capsules rouges (on peut utiliser un autre matériel). Les cailloux représentent les unités, les capsules bleues représentent les dizaines, les capsules rouges représentent les centaines.

Trouver toutes les manières de représenter le nombre 235.

- ✧ Jeu de la cible

La cible a 4 zones ; 1000, 100, 10, 1. Le joueur qui atteint une de ces zones a un score de 1000, 100, 10 ou 1. Le nombre de tirs n'est pas limité.

Questions : J'ai un score de 2014. Est-ce possible que j'ai tiré dans la zone 100 ?

J'ai un score de 1245. J'ai effectué 12 tirs. Dans quelle zone ai-je tiré et combien de fois ?

J'ai un score de 1215. J'ai tiré dans la zone 100 et dans la zone 1. Combien de fois ai-je tiré ?

Trouver toutes les manières possibles pour obtenir un score de 4532

2- Structuration par le formateur

- ✧ Réflexion collective menée par le formateur sur les objectifs, les points communs et les différences de ces deux activités.

Il s'agit dans les deux cas de **décompositions de nombres** suivant les **différentes classes**. La première activité privilégie la manipulation de matériel réel, la deuxième travaille à partir des nombres 10, 100, 1000.

- ✧ Le jeu de la cible peut être utilisé au 1er et 2ème cycle y compris pour travailler les grands nombres en adaptant la valeur de chaque zone au niveau de classe.

3- Apports

- ✧ Le système décimal est basé sur **les groupements par 10**. Une dizaine, c'est un groupe de 10. Une centaine est un groupe de 10 dizaines.

Avec les élèves, on travaillera tout d'abord cette notion de groupements par 10 en leur faisant dénombrer des collections après les avoir groupées et en leur présentant des collections groupées par 10. Matériel de groupements : cailloux en tas de 10, bâtonnets attachés avec un élastique.

- ✧ Les **échanges** viennent compléter la notion de groupements. On échange 10 objets représentant 10 unités contre 1 objet représentant une dizaine.

La notion d'échange est plus difficile que la notion de groupements. Il y a un obstacle particulier lié au savoir enseigné (la dizaine) qui semble déséquilibrer ce que les élèves avaient compris de l'égalité de deux collections.

Ces deux activités visent à aider l'enfant à franchir cet obstacle en faisant fonctionner les concepts (dizaines, centaines, milliers) comme des outils pour résoudre les problèmes posés. Le matériel comme matérialisation de ces concepts peut servir de soutien à la pensée et de support à l'argumentation.

- ✧ **Codage de ces groupements-échanges** : On peut représenter chaque classe de nombre par un signe différent.

Centaines  Dizaines  Unités 

On a représenté le nombre 235.

Dans la numération égyptienne traditionnelle, chaque classe était représentée par un signe différent.

Des codages de ce type sont moins abstraits pour les élèves que la numération de position. Ils aident à construire le système décimal et aideront aussi à la compréhension des techniques opératoires.

- ✧ Dans **la numération de position**, on n'a pas un signe différent pour chaque classe de nombres. Il n'existe que 10 chiffres et c'est la place du chiffre dans le nombre qui lui donne sa valeur.

Pour l'enfant, il y a un nouvel obstacle lié au savoir : le chiffre n'a pas toujours la même valeur. Dans 235, le chiffre 2 a une valeur supérieure à la valeur du chiffre 5. En effet, ce chiffre 2 représente 200 puisqu'il est à la place des centaines.

- ✧ **La décomposition du nombre** peut être faite en utilisant des écritures différentes.

Décompositions canoniques : 4 milliers + 2 centaines + 3 dizaines + 5 unités

$$4235 = 4000 + 200 + 30 + 5$$

$$4235 = (4 \times 1000) + (2 \times 100) + (3 \times 10) + 5$$

Autres décompositions : $4235 = 42 \text{ centaines} + 3 \text{ dizaines} + 5 \text{ unités}$

$$4235 = 42 \text{ centaines} + 35 \text{ unités}$$

$$4235 = 423 \text{ dizaines} + 5 \text{ unités}$$

$$4235 = 4 \text{ milliers} + 23 \text{ dizaines} + 5 \text{ unités}$$

Ces décompositions ne doivent pas être menées de façon mécanique mais en utilisant des situations-problèmes. Leur compréhension permet la compréhension des groupements-échanges et la structure du système décimal.

- ✧ **Tableau des nombres** : c'est une aide pour comprendre la régularité du système écrit

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29
 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39
 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49
 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59
 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69
 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79
 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89
 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99

Le tableau est organisé comme un tableau à double entrée avec les lignes de dizaines et les colonnes d'unités.

- ✧ Attention à **la différence entre chiffre et nombre** : les chiffres servent à écrire des nombres comme les lettres servent à écrire des mots. Il y a des nombres à 1 chiffre, 2 chiffres, 3 chiffres, etc ... Dans l'opération $4 + 257$, j'ai 2 nombres qui sont 4 et 257. Le chiffre 2 de 257 représente 200. L'enseignant doit faire attention à utiliser le vocabulaire correct pour faciliter la compréhension.
- ✧ **La numération orale** est irrégulière. Il y a une irrégularité entre onze et seize. Si le système était régulier, on utiliserait les mots dix-un, dix-deux, etc. De même, les nombres entre 70 et 99 ont une désignation orale irrégulière. En 1ère AF, les élèves étudient les nombres jusqu'à 69. Les élèves peuvent travailler sur des nombres qu'ils ne savent pas lire en comprenant le codage et la régularité de la numération écrite.
- ✧ **La file numérique**

C'est la suite des nombres. Elle est théoriquement infinie. On peut afficher une file numérique allant jusqu'à 30, 50 ou 100 suivant le niveau des élèves. On explique que ce n'est

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

que le début et que la file numérique est infinie.

La file numérique et le tableau des nombres sont affichés dans la salle de classe. Ils servent de repères aux élèves pour savoir si un nombre est plus grand ou plus petit.

- ✧ **La droite graduée**

4 – Obstacles et variables

Obstacles

- ✧ Difficulté à concevoir qu'un seul objet puisse en valoir 10.(groupements-échanges)
- ✧ Passage à la numération de position : il n'y a plus 3 objets ou 3 dessins pour représenter 3 dizaines mais le chiffre 3 dans la colonne des dizaines
- ✧ Non-concordance entre les numérations orale et écrite

Variables didactiques

- ✧ Utilisation d'objets où on voit encore le groupement (unités regroupées) ou d'objets qui n'ont qu'une valeur d'échange (1 capsule contre 10 cailloux)
- ✧ Activités de commande où on commande 3 paquets de 10 unités
- ✧ Codage utilisant seulement l'écrit, seulement l'oral, mise en relation des deux codages

5- Activités de classe pour travailler la numération décimale

1ère et 2ème AF

Objectifs 1ère et 2ème AF

- ✧ *Comprendre que la valeur d'un chiffre change selon sa position dans le nombre.*
- ✧ *Pouvoir décomposer un nombre en dizaines, unités. (centaines 2ème année)*

Objectifs 2ème AF

- ✧ *Faire la différence entre le chiffre des dizaines et le nombre de dizaines (342 contient 34 dizaines, son chiffre des dizaines est 4).*

ACTIVITE 1 : LES GROUPEMENTS

Matériel : Bûchettes, petits bâtons ou pailles
Ficelles ou élastiques
File numérique collective en ligne
File numérique collective en tableau

SEANCE 1

ETAPE 1

Les élèves travaillent par 2. Ils ont un tas de bûchettes (par exemple 26 bûchettes) sur la table. Ils doivent faire des paquets de 10, les entourer avec un élastique puis dire combien ils ont de paquets et combien de bûchettes seules.

Le professeur interroge un groupe.

Réponse attendue : 2 paquets et 6 bûchettes toutes seules. Le professeur demande : Qui n'a pas trouvé ce résultat ?

Si la réponse est exacte, on peut passer rapidement. S'il y a une erreur, sans gronder les élèves, le professeur fait chercher l'origine de l'erreur.

Erreurs possibles :

- ❖ *Les élèves obtiennent plus de 2 paquets. Ils n'ont probablement pas compris qu'il faut faire des paquets de 10. On leur pose la question : Combien y a-t-il de bâchettes dans ton paquet ? Est-ce que c'était la consigne ?*
- ❖ *Les élèves n'obtiennent pas 6 bâchettes toutes seules. Ils ont probablement cherché à faire des paquets de 10 mais se sont trompés.*
 - *Compte les bâchettes de tes paquets pour être sûr qu'il y en a 10.*

Le professeur écrit au tableau : 2 paquets et 6 bâchettes.

ETAPE 2

Les élèves qui étaient par 2 vont se mettre par 4 sans défaire leurs paquets.

Le professeur demande :

Maintenant, combien avez-vous de paquets et combien de bâchettes toutes seules ?

Réponses possibles :

- ❖ 4 paquets et 12 bâchettes
- ❖ 5 paquets et 2 bâchettes
- ❖ certains élèves vont peut-être poser la question : “est-ce qu'on fait le paquet?”

Le professeur précise que toutes ces réponses sont exactes et redonne la règle de groupement - Oui, vous avez raison, 4 paquets et 12 bâchettes, ça fait pareil que 5 paquets et 2 bâchettes. Mais, la règle, c'est qu'à chaque fois qu'on a 10 bâchettes, on fait un paquet. Il ne faut pas plus de 9 bâchettes toutes seules.

Le professeur écrit au tableau : 5 paquets et 2 bâchettes.

Classes de 2ème année :

On réalise les étapes 1 et 2 plus rapidement . Puis on fait se regrouper deux groupes de 4 élèves. On leur donne la nouvelle règle : quand on a 10 paquets, on les attache ensemble. Les élèves disent combien ils ont obtenu de gros paquets, combien de petits paquets, combien de bâchettes seules.

Puis on regroupe sur une table toutes les bâchettes de la classe. Il y a des gros paquets, des petits paquets et des bâchettes . Si on a plus de 10 bâchettes, on reforme un petit paquet, si on a plus de 10 petits paquets, on reforme un gros paquet. On écrit ce qu'on a obtenu au tableau noir.

SEANCE 2 : Les groupements (jour 2)

Les élèves se remettent par 2. Un élève distributeur leur donne une poignée supplémentaire de bâchettes sans les compter. Chaque groupe a donc un nombre différent de bâchettes compris entre 40 et 60 environ .

Le maître a un tas de bâchettes sur une table devant lui. Il vérifie que tous les élèves voient cette table. Il fait venir deux élèves pour montrer le travail en même temps qu'il explique. Les élèves comptent, groupent et écrivent au tableau.

Consigne : Vous avez un nouveau tas de bâchettes à compter. Vous allez partager ce tas entre vous deux. Vous partagez au hasard. Ça ne fait rien si vous n'avez pas pareil, ce sera plus intéressant. Avec son tas, chaque élève fait des paquets de 10 puis écrit sur son ardoise combien il

a de paquets et combien il a de bâchettes toutes seules. Quand vous avez fini, c'est votre voisin qui vérifie ce que vous avez trouvé et vous vérifiez ce qu'a trouvé le voisin.

Si vous êtes d'accord, vous mettez ensemble les paquets sans les défaire et vous écrivez combien vous en avez ensemble.

Les élèves réalisent cette situation plusieurs fois pour s'entraîner :

- ✧ Pour son tas, chaque élève fait les paquets de 10 et écrit le nombre de paquets et le nombre de bâchettes toutes seules.
- ✧ Chaque élève échange avec son voisin pour vérification.
- ✧ Les deux élèves mettent ensemble leurs tas sans défaire les paquets, regroupent les bâchettes seules si nécessaire et écrivent le nombre de paquets et le nombre de bâchettes seules obtenus.

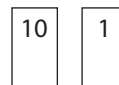
Il n'est pas nécessaire que le maître vérifie à chaque fois car les élèves vérifient entre eux. Pour le nombre total, ils doivent trouver le même résultat à chaque fois. Le professeur peut passer dans la classe, laisser travailler seuls les élèves qui ont compris et se concentrer sur les groupes d'élèves en difficulté;

Classes de 2^{ème} AF : Le maître groupe les élèves par 4, leur confie un gros tas de bâchettes et leur demande de les organiser en petits paquets et gros paquets suivant la règle vue la séance précédente;

ACTIVITE 2 : LES ECHANGES - JEU DU MARCHE

SEANCE 1 :

Matériel : Les élèves ont de la monnaie sous cette forme :



Pour la classe : 2 dés.

Les élèves sont par groupes de 4.

La règle d'échange : un carton de 10 égale 10 cartons de 1.

ETAPE 1 :

Chaque groupe dispose de 50 gourdes (5 cartons de 10).

Un représentant de chaque groupe vient à tour de rôle tirer les dés. Il annonce à voix haute ce qu'il a obtenu, par exemple 6 et 4. Le maître dessine les constellations du dé au tableau et demande aux élèves le résultat. L'élève prend l'"argent" correspondant dans la banque. Le maître vérifie.

Quand chaque groupe est passé une fois, il dispose forcément d'une somme comprise entre 52 et 62 gourdes. (il a gagné entre 2 et 12 G)

ETAPE 2

Le maître présente des images représentant des objets à vendre avec des prix qui varient entre 2 et 19 gourdes.

Les prix sont présentés de cette manière :
pour 12 par exemple :



Chaque groupe choisit ce qu'il peut acheter et vient payer et prendre la marchandise. Si il n'a pas la monnaie nécessaire, il doit faire l'échange à la banque, le banquier ne rend pas la monnaie. Par exemple, le groupe veut acheter un objet qui coûte 17 gourdes, il dispose de 5 cartons de

10 et 3 cartons de 1. Il voit qu'il lui faut 1 carton de 10, il le donne mais il n'a que 3 cartons de 1 et il lui en faut 7.

Il échange à la banque un carton de 10 contre 10 cartons de 1.

Chaque groupe passe deux fois.

Classes de 2^{ème} AF :

On réalise plus rapidement les étapes 1 et 2. Puis le maître donne à chaque groupe un carton de 100.

Il "met en vente" des objets plus chers : de 40 à 99 gourdes. Les élèves vont être obligés d'échanger leur carton de 100 contre 10 cartons de 10.

ACTIVITE 3 : REMPLISSONS LE PANIER

Matériel : Pour la classe : des enveloppes marquées "10" contenant 10 cailloux
Une boîte contenant un grand nombre de cailloux

Par groupe de 2 élèves : un carton représentant un panier avec un nombre variable de cases .(de 6 à 29)

ETAPE 1 :

Les enveloppes marquées "10" ne sont pas sorties. Les groupes ont des paniers avec des nombres de cases entre 6 et 12 suivant le niveau des élèves (différenciation).

Les élèves doivent aller chercher en un seul voyage juste ce qu'il faut de cailloux pour remplir le panier. Ils laissent le panier-carton sur la table et vont chercher les cailloux. Puis ils placent les cailloux sur les cases pour vérifier.

Le professeur intervient seulement pour rappeler la consigne : ***un seul voyage et un caillou par case***. Il ne corrige pas les procédures. Les élèves réalisent la tâche.

Procédures possibles :

- ✧ Ils vont chercher une quantité de cailloux sans compter en estimant à peu près.
- ✧ Ils comptent partiellement (par exemple 1-2-3-1-2-3 pour 6)
- ✧ Ils comptent le nombre de cases et vont compter le même nombre de cailloux.

Les élèves voient eux-mêmes s'ils ont réussi en posant les cailloux. C'est une **situation auto-validante**. S'ils ont échoué, on continue à leur donner une carte avec un petit nombre (6 ou 7). Ils vont progressivement améliorer leurs procédures en répétant la situation plusieurs fois.

S'ils ont réussi, on peut leur donner des cartes avec plus de cases (jusqu'à 12).

On répète cette situation plusieurs fois jusqu'à ce que les élèves soient à l'aise avec des cartes de 9 ou 10. A chaque fois, les élèves rapportent les cailloux dans la boîte avant de recommencer avec une autre carte.

ETAPE 2

Les enveloppes marquées "10" sont sorties et placées près de la boîte de cailloux.

Les élèves ont des cartes-paniers avec un nombre de cases entre 10 et 15.

Consigne : - Nous allons un peu changer la règle du jeu. Il faut toujours un caillou pour chaque case mais vous n'avez pas le droit de prendre plus de 9 cailloux tout seuls. Dès qu'il y en a 10, vous prenez une enveloppe comme ceci : il y a 10 cailloux dans l'enveloppe.

Le professeur montre l'enveloppe et son contenu.

- Donc, tous les deux, vous regardez bien votre panier pour voir combien il faut d'enveloppes et combien il faut de cailloux tout seuls. Vous venez chercher ce qu'il faut puis vous vérifiez en posant les cailloux que vous avez pris ce qu'il faut.

Cette nouvelle consigne est difficile . Au début, le maître vérifiera que les élèves ne prennent pas plus de 9 cailloux tout seuls. Mais il les laissera prendre la quantité qu'ils veulent même si elle est fausse. Les élèves vont sortir les cailloux des enveloppes et vérifier. Ils auront besoin de plusieurs essais avant d'y arriver. Le professeur les laisse faire et les encourage.

Procédures possibles :

- ✧ Les élèves comptent 12 et disent : il faut une enveloppe et 2 cailloux (ils ont retenu une décomposition de 12 dans les séances précédentes ou tout seuls).
- ✧ Les élèves comptent 10 et disent : il faut une enveloppe puis ils comptent, 2 et disent : il faut 2 cailloux

Le professeur observe le travail de ses élèves. Lorsque la moitié à peu près arrive à réaliser la tâche, il arrête le travail pour demander à des élèves d'expliquer leur procédure. Il interroge des élèves ayant fait des procédures différentes.

- Nous allons arrêter un moment, nous continuerons après. Je voudrais que vous disiez comment vous faites. Il nomme deux élèves :

- Expliquez à vos camarades comment vous faites.

Le professeur aide les élèves à formuler ce qu'ils ont fait en leur posant des questions. Il reformule : Les élèves répètent ce travail plusieurs fois. Le professeur peut donner des cartes-paniers de plus en plus difficiles pour les élèves qui réussissent (entre 20 et 30). A chaque fois, les élèves rapportent les cailloux et les enveloppes. Attention, il faut vérifier qu'ils ont bien remis 10 cailloux dans chaque enveloppe.

ETAPE 3

Matériel : Le même que pour l'étape 2. Chaque groupe a en plus un bon de commande de cette forme. Le professeur a reproduit cette feuille en plus grand au tableau noir.

Consigne : - Nous continuons le jeu : “Remplissons le panier”. Aujourd'hui, il faut faire des commandes. Vous avez une feuille de commande pour commander le nombre d'enveloppes

et le nombre de cailloux tout seuls. Sur la feuille, on a dessiné une enveloppe et un caillou. (Il montre). Si on veut commander 2 enveloppes, on écrit 2 en-dessous de l'enveloppe. (Il écrit 2). Si on veut commander 4 cailloux tout seuls, on écrit 4 en dessous du caillou (Il écrit 4).

- Moi, je serai le marchand, je vais voir ce que vous avez écrit. Si je vois 2 enveloppes, je vous donne 2 enveloppes. Il faudra bien regarder les cases pour écrire ce qu'il faut.

Le maître efface les nombres écrits et laisse seulement le bon de commande vide.

Erreurs possibles

❖ **Inversion entre dizaines et unités : nombre de dizaines écrit dans la colonne- unité . Le maître peut demander : “ C'est bien 4 cailloux que tu veux ? Tu as écrit que tu veux 4 cailloux.”**

❖ **Ecriture du nombre complet (dizaines et unités) dans une des colonnes.**

Quand les élèves arrivent à écrire la commande, le maître fait arrêter l'activité. Il a dessiné une carte-panier de 23 cases au tableau . Il fait venir un élève pour remplir la commande correspondante. Il demande à l'élève d'expliquer ce qu'il a fait. Puis il reformule :

- Tu as trouvé qu'il faut 2 enveloppes, tu as écrit 2 dans la colonne des enveloppes. Tu as trouvé qu'il faut trois cailloux tout seuls, tu as écrit 3 dans la colonne des cailloux.

Une enveloppe, ça fait combien de cailloux ?

Les élèves répondent 10.

- C'est pareil que quand on a fait les paquets de 10 bâchettes. Quand on fait un paquet de 10, ça s'appelle une dizaine.

Il écrit “ dizaines” au-dessus de l'enveloppe.

- Les objets, par exemple les cailloux ou les bâchettes, on les appelle les unités.

Il écrit “unités” au-dessus des cailloux.

Classes de 2 ème année

On fait les étapes 1, 2 et 3 plus rapidement. Puis, le maître demande à quelques élèves de venir l'aider à ranger 10 enveloppes dans une grande pochette. Il dit :

- Quand on groupe 10 paquets de 10, ça fait 100. Cela s'appelle une centaine.

Il écrit au tableau : **centaine**. Il dessine une nouvelle colonne au bon de commande.

Avec le bon de commande au tableau, il demande aux élèves :

- Si j'ai 34 enveloppes, je peux former combien de grandes enveloppes ? Ca fait combien de centaines ?

PROLONGEMENTS : Séances suivantes :

❖ Même situation mais on écrit sur le bon de commande dizaines et unités en plus des dessins des enveloppes et des cailloux.

❖ Entraînement à l'ardoise. Le maître écrit un nombre à tableau et le dit à voix haute. Puis il demande d'écrire sur l'ardoise combien cela fait de dizaines. Puis combien il reste d'unités.

Attention à ne pas confondre le chiffre des unités et les unités: dans 23, le chiffre des unités est 3 mais le nombre d'unités est 23. On peut dire aux élèves : les unités, c'est tous les objets, le chiffre des unités, c'est les objets qui restent quand on a fait les paquets de 10.

❖ Entraînement à l'ardoise. Le maître dit par exemple“ 3 dizaines et 4 unités”. Ecrivez le nombre. Les élèves écrivent le résultat sur l'ardoise, lèvent l'ardoise puis le maître écrit le résultat au tableau.

Classes de 2^{ème} année

✧ Entraînement du type : Dans 348, je peux faire combien de paquets de 10 ? Réponse 34.
Et combien de paquets de 100 ? 3

Bien repérer la différence entre le nombre de paquets de 10 que je peux faire. Ici, c'est 34, c'est le nombre de dizaines. Et ce qui reste de dizaines quand j'ai fait les paquets de 100. Ici, c'est 4, c'est le chiffre des dizaines.

3^{ème} et 4^{ème} AF

Objectifs : Comprendre la numération de position pour des nombres plus importants.
Pouvoir décomposer un nombre en milliers, centaines, dizaines, unités,

4^{ème} AF : en dizaines de mille, centaines de mille, millions

ACTIVITE 4 : LE JEU DE LA CIBLE

SEANCE 1

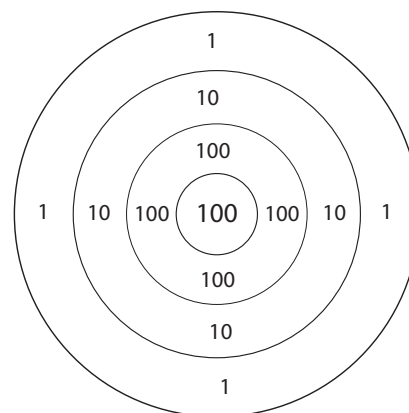
ETAPE 1

Le professeur dessine au tableau une grande cible de cette forme

3^{ème} AF

Les élèves sont par équipes de 5. Chaque élève lance une boule de papier dans la cible en essayant d'atteindre le centre. Un autre élève marque les résultats au tableau.

On fait passer tous les élèves d'une équipe à la suite et on leur demande leur score. Par exemple, deux élèves ont fait 1000, deux élèves ont fait 10, un élève a fait 1. Le score est de 2 021. Un élève du groupe lit le nombre à voix haute. Si les élèves n'arrivent pas à lire le nombre, le maître le lit.



4^{ème} AF

Même travail mais on a ajouté au centre de la cible les zones 10 000 et 100 000. On rajoutera la zone 1 000 000 plus tard dans l'année.

ETAPE 2 :

Les élèves sont par groupe de 4 à leurs tables. Le maître est au tableau, il marque 5 impacts sur la cible. Les élèves de chaque groupe doivent discuter entre eux, se mettre d'accord sur le score obtenu et l'écrire sur une ardoise.

Par exemple, il y a deux impacts dans la zone 100, un impact dans la zone 1000, un impact dans la zone 10 et un impact en dehors de la cible. Les élèves écrivent 1 210.

Le professeur écrit le résultat dans un tableau de ce type.

1000	100	10	1
1	2	1	0

Tout en écrivant, il dit :

- *Il y a une marque dans la zone 1000, deux marques dans la zone 100, 1 marque dans la zone 10 et pas de marque dans la zone 0.*

Le professeur demande ensuite à un élève de lire le résultat.

On fait d'abord écrire car la lecture est une difficulté supplémentaire. Certains élèves vont arriver à écrire le nombre en s'aidant de la situation mais auront du mal à le lire car les mots sont moins réguliers que les chiffres.

4ème AF : Le travail est le même mais on ajoute les zones 10 000 et 100 000.

Le professeur fait réaliser quelques situations de ce type jusqu'à ce que les élèves soient à l'aise, au moins en écrivant.

SEANCE 2

ETAPE 1 :

Les élèves sont par groupe de 4 à leurs tables. Le maître est au tableau, il marque un score mais il l'écrit à côté du tableau. Par exemple 3 011. Il demande aux élèves de dire quelles ont été les zones touchées.

Pour corriger, il passe par le tableau.

Cette étape est nécessaire mais ne présente pas beaucoup de difficultés.

ETAPE 2 :

Les élèves sont par groupe de 4 à leurs tables. Le maître est au tableau. Il va poser des petits problèmes aux groupes qui doivent réfléchir et s'entendre sur une réponse et une explication.

Par exemple : J'ai tiré 5 fois, j'ai obtenu le score 2310. Est-ce possible ?

Réponse : Non, car il faudrait avoir tiré 6 fois.

J'ai tiré 12 fois dans la cible. J'ai obtenu le score 1101. Pourtant, je n'ai pas touché le 1000. Est-ce possible ?

Les élèves risquent de répondre non en se basant sur le tableau . Il faut les laisser chercher et manipuler pour qu'ils se rendent compte qu'on peut tirer 11 fois dans le 100.

- Vous voyez : on peut faire 11 fois 100, c'est pareil que 1 fois 1000 et 1 fois 100. Dans 1101, il y a 11 centaines. Le nombre de centaines est 11.

SEANCE 3 :

Les élèves sont par groupes de 4 à leurs tables. Le maître propose des scores. Les élèves doivent réfléchir à tous les moyens possibles d'obtenir ce score.

Par exemple : **4ème AF :**

Un élève a obtenu le score de 560 123. Il a tiré beaucoup de fois. Dans quelle zone a-t-il tiré ?

- Les élèves répondent : 5 fois dans 100 000, 6 fois dans 10 000, 1 fois dans 100, 2 fois dans 10 et 3 fois dans 1. Il a tiré 16 fois.

- Oui, vous avez raison, mais il existe d'autres façons. On imagine qu'il peut tirer beaucoup, beaucoup de fois.

Si les élèves ne trouvent pas, on peut leur dire qu'au lieu de tirer 2 fois dans 10 et 3 fois dans 1, il a tiré 23 fois dans 1.

Réponses possibles : Les élèves “ voient” d'abord les milliers. Par exemple , ils voient 560 fois dans 1000.

Quand les élèves trouvent et proposent des solutions, on les écrit au tableau .

On insiste jusqu'à les avoir toutes trouvées. Puis on repropose une situation du même type en leur demandant par groupe de trouver toutes les solutions possibles.

3ème AF : Même travail avec des nombres plus petits.

4- Activités de réinvestissement-évaluation par les élèves - maîtres

Dans les activités et les exercices que vous avez vus, les exemples ont été pris en de la 1ère à la 4ème AF. Ces activités et exercices de numération sur les nombres entiers sont aussi très importants pour les élèves de la 5ème AF et 6ème AF. Le domaine numérique n'est pas le même. Adaptez ces exercices. Chaque groupe choisira un niveau de classe différent. Les activités et exercices créés seront ensuite mutualisés pour vous constituer un bagage professionnel.

B- ADDITION ET SOUSTRACTION

Objectifs :

- ✧ Comprendre le sens des différentes situations d'additions et de soustractions.
- ✧ Identifier et élaborer des situations faisant intervenir l'une ou l'autre de ces opérations arithmétiques.
- ✧ Expliquer les techniques opératoires de ces opérations sur les nombres entiers.
- ✧ Comprendre les obstacles et les difficultés à la construction de ces notions, élaborer des situations permettant de franchir ces obstacles.

1 – Mise en situation des étudiants-maîtres

Problème : *Il y a 10 enseignants à l'école. Parmi eux, 6 sont des maîtres, combien y a-t-il de maîtresses ?*

Quelle est l'opération (ou les opérations) en cause dans ce problème ? Listez les différentes procédures que des élèves pourraient utiliser pour le résoudre (avec ou sans la connaissance des opérations)

2 – Structuration par le formateur

Le formateur guidera la mise en commun et la discussion pour faire ressortir les différentes procédures.

- ✧ **Utilisation de matériel:** L'élève fait une collection de 10 cailloux. Puis il en isole 6 qui représentent les maîtres. Il constate le résultat qui est le nombre de maîtresses.
- ✧ **Surcomptage :** L'élève « part » de 6 pour « aller » à 10 en comptant 1,2,3,4. Il y a souvent une utilisation des doigts.
- ✧ **En reculant :** L'élève compte à l'envers en partant de 10 et en reculant 6 fois . Cette technique est davantage utilisée quand le nombre à retirer est petit.
- ✧ En calculant une **addition à trou** : $6 + ? = 10$
- ✧ En calculant une **soustraction** : $10 - 6 = ?$

Est-ce une situation d'addition ou de soustraction ? C'est en fait la même chose. La soustraction est l'**opération réciproque** de l'addition. A chaque addition correspondent deux soustractions.

$$6 + 4 = 10$$

$$10 - 4 = 6$$

$$10 - 6 = 4$$

3- Apports

L'addition :

C'est l'opération de base , on l'utilise tout d'abord quand on réunit deux quantités.

Voici quelques situations d'addition .

- ✧ **Réunion de 2 collections**
Pierre a 4 billes. Son ami a 8 billes. Combien ont ensemble les deux enfants ?
- ✧ **Gain par rapport à une quantité**

Pascal avait 4 billes. Il en a gagné 8. Combien en a-t-il maintenant ?

✧ **Ecart entre deux collections**

Suzanne a 4 billes. Sa soeur en a 8 de plus. Combien de billes a sa soeur ?

Toutes ces situations peuvent être symbolisées par l'écriture : $4 + 8 = 12$

En 1ère et 2ème année, on travaillera les situations de réunion et de gain. La situation de réunion est la plus facile. En 3ème et 4ème année, on travaillera toutes les situations d'addition. En 5ème et 6ème année, on ajoute les additions de fractions et de décimaux.

Addition à trou : On connaît une des parties, on connaît le total, on cherche la deuxième partie
: $4 + \underline{\quad} = 12$

L'addition à trou prépare à comprendre la situation de soustraction. Elle est travaillée dès la première année pour de petits nombres.

Décomposition additive d'un nombre : On connaît le total. On cherche quelles additions de 2 nombres correspondent à ce total.

$$12 = \underline{\quad} + \underline{\quad}$$

Il y a plusieurs solutions possibles.

Décomposer un nombre permet de comprendre qu'un tout peut se partager en plusieurs parties égales ou non. Cela aide à identifier les situations d'addition et de soustraction.

Décomposer les nombres (en dessous de 20) permet de comprendre et de mémoriser la table d'addition.

La soustraction : C'est l'opération opposée de l'addition.

A chaque addition correspondent deux soustractions.

Pour $4 + 8 = 12$, on a :

$$12 - 4 = 8$$

$$12 - 8 = 4$$

Voici quelques situations de soustraction

- On **enlève** : Flora a 12 billes, elle en perd 8. Combien en reste-t-il ?
- On cherche le **complément** : Dans la famille, il y a 12 enfants, il y a 4 filles. Combien y a-t-il de garçons ?
- On cherche l'**écart** : Philippe a ramassé 8 mangues. Christine en a ramassé 12 ? Combien Christine a-t-elle ramassé de plus que Philippe ?

Ces situations sont classées de la plus facile à la plus difficile.

La recherche de l'écart est assez difficile (à partir de la 4ème AF)

On utilise la soustraction pour calculer une différence, un reste, une perte ou une diminution

a) **Différence:**

Gilbert a 7 billes et son camarade Ronald en a 28. Combien Ronald a-t-il de billes de plus que Gilbert?

$D = 28 - 7 = 21$ billes (différence). => Ronald possède donc 21 billes de moins que son camarade Gilbert.

b) **Calcul de reste :**

J'avais 20 G, j'ai acheté une plume à 9 G. Combien me reste-t-il?

Il me reste: $20\text{ G} - 9\text{ G} = 11\text{ G}$ (RESTE)

c) **Une perte:**

Nicole a acheté une poule pour 260 G, elle l'a revendue pour 245 G. Quelle est sa perte?

Perte = $260 - 245 = 15$

Elle a perdu 15 G

d) **Une diminution :**

Une robe qui coûtait autre fois 385 G et qui ne coûte plus que 265 G. Quelle est la diminution du prix de ce produit?

Baisse = $385\text{G} - 265\text{G} = 120\text{ G}$

e) **Manque :**

Sandrine voudrait acheter une bicyclette qui coûte 1250 G. Actuellement, elle ne possède que 1180 G. Combien il lui faut encore pour se procurer de cette bicyclette?

Il lui faut encore : $1250 - 1180 = 70\text{ G}$

La soustraction est introduite en 2ème AF.

Propriété de la soustraction:

Observe ces exemples:

$$145 - 20 = 125$$

$$148 - 33 = (145 + 3) - (30 + 3) = 115$$

$$141 - 26 = (145 - 4) - (30 - 4) = 115$$

Remarquons qu'on ne modifie pas le résultat de la soustraction en ajoutant ou en retranchant le même nombre à ses deux termes.

Cette propriété nous sera utile en calcul rapide (ex: $119 - 79 = 200 - 60 = 40$)

Situation de référence de l'addition et de la soustraction

ACTIVITE 5 : LA BOITE (d'après Ermel)

Les élèves sont par 2. Ils ont une boîte non transparente (type boîte d'allumettes) avec un trou. Ils doivent répondre à des questions en écrivant le résultat sur leur ardoise. Ils ouvrent la boîte pour validation ;

- ✧ **Recherche du nombre final** : L'enseignant demande de mettre dans la boîte une quantité de cailloux puis une autre. Les élèves écrivent le nombre final. Puis ils ouvrent la boîte et comptent les cailloux pour validation. « Mettez 6 cailloux puis ajoutez 7 cailloux. Combien y en a-t-il ? » La validation se fait en comptant.
- ✧ **Recherche de ce qui a été ajouté** : Les élèves mettent un nombre de cailloux dans la boîte. L'enseignant leur demande d'ajouter ce qu'il faut pour arriver à un nombre final. « Mettez 6 cailloux dans la boîte. Puis, vous ajoutez ce qu'il faut pour arriver à 13 cailloux. » La validation se fait en comptant.
- ✧ **Recherche du nombre initial** : C'est l'enseignant qui manipule dans une boîte collective. Il se tourne et met des cailloux dans la boîte sans que les élèves sachent combien il y en a. Puis il ajoute devant les élèves un nombre connu de cailloux. Il annonce le nombre final et demande le nombre initial. « Je mets des cailloux dans la boîte, je ne vous dis pas combien. Maintenant, j'ajoute 6 cailloux. Maintenant, il y a en tout 13 cailloux dans la boîte. Combien y en avait-il au début ? » La validation se fait en retirant les cailloux ajoutés et en comptant le reste.

ACTIVITE 6 : DEPLACEMENTS SUR LA FILE NUMERIQUE

On travaille parallèlement des situations de déplacements sur la file numérique ou la droite graduée. Les élèves anticipent le résultat. La validation se fait en se déplaçant réellement.

- ✧ Recherche du **nombre final** : « On est sur le 6, on avance de 7. Où est-on maintenant ? »
- ✧ Recherche de **ce qui a été ajouté** : « On est sur le 6, on avance et on arrive sur le 13. Combien a-t-on ajouté ? »
- ✧ Recherche du **nombre initial** : On part d'une case inconnue, on avance de 7 et on arrive sur le 13. De quelle case est-on parti ?

A partir de la 3ème AF, on posera ce type de problème sans que les objets soient présents. La validation se fera uniquement par raisonnement et vérification des calculs. Quand un élève rencontre des difficultés à conceptualiser cette notion, quelle que soit sa classe, on doit l'encourager à travailler de nouveau avec les objets.

Ces problèmes pourront être posés en calcul mental pour fixer les structures des problèmes additifs et soustractifs.

Les additions et soustractions posées

On ajoute ou on soustrait les unités avec les unités, les dizaines avec les dizaines, etc...

L'addition ou la soustraction posée sont travaillées avec le matériel de numération. On ajoute ou on enlève les objets qui représentent les unités, les dizaines, les centaines.

Pré-requis :

- ♦ comprendre les situations d'addition ou de soustraction
- ♦ avoir calculé des additions ou des soustractions en ligne (sans retenue)
- ♦ pouvoir trouver facilement des sommes de nombres jusqu'à 10 (pour l'addition) ou des différences(pour la soustraction). Si l'élève n'est pas suffisamment habile pour trouver ces sommes ou différences, il ne pourra en même temps retrouver ces sommes et enchaîner les différents calculs.

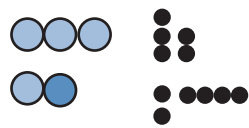
L' addition avec retenues

Connaître bien le système de numération pour gérer efficacement la retenue.

Lorsque la quantité dans une colonne (unités, dizaines ou centaines) atteint 10, on forme un nouveau groupement de niveau supérieur.

Elle se base sur les groupements par 10. On peut facilement la verbaliser aux élèves : « J'ai 11 unités, je fais un nouveau paquet d'une dizaine et j'écris 1 à la place des unités.

On peut faire dessiner l'opération en représentant le matériel de numération ou manipuler directement le matériel.

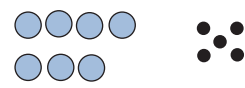
$$\begin{array}{r} 1 \\ 35 \\ +26 \\ \hline 61 \end{array}$$


On additionne les unités. Si le nombre des unités dépasse 10, on forme une nouvelle dizaine. On obtient 6 dizaines et 1 unité = 61

Avec le matériel de numération, on fait effectuer l'addition en manipulant l'échange entre les 10 unités et la dizaine ajoutée.

La soustraction avec retenues

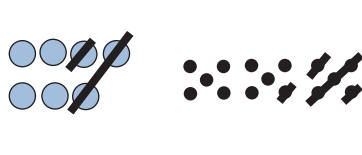
- ♦ **Technique où on transforme une dizaine en 10 unités** : on cherche à faire $75 - 26$

$$\begin{array}{r} 75 \\ - 26 \\ \hline \end{array}$$


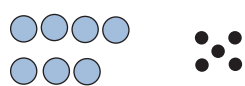
- 1) On constate qu'on ne peut pas retirer (barrer) 6 unités.
- 2) On transforme une dizaine en 10 unités. (on retire une dizaine et on ajoute 10 unités)

$$\begin{array}{r} 6 \\ \cancel{7} 15 \\ - 26 \\ \hline \end{array}$$

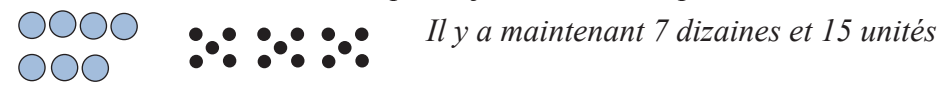

- 3) Pour soustraire 26, on retire (on barre) 2 dizaines de 6 dizaines et 6 unités de 15 unités. Il reste 4 dizaines et 9 unités.

$$\begin{array}{r} 6 \\ \cancel{7} 15 \\ - 26 \\ \hline 49 \end{array}$$


- ♦ **Technique où on ajoute une quantité qu'on retire ensuite** : on cherche à faire $75 - 26$

$$\begin{array}{r} 75 \\ - 26 \\ \hline \end{array}$$


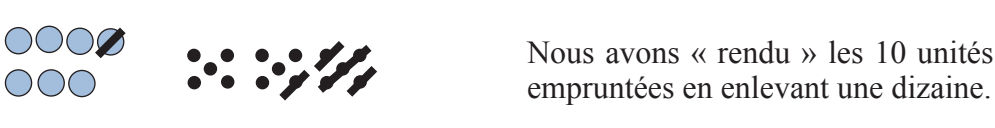
- 1) On constate qu'on ne peut pas retirer (barrer) 6 unités.
- 2) On « emprunte 10 unités », c'est à dire qu'on ajoute 10 unités qu'on devra retirer ensuite

$$\begin{array}{r} 715 \\ - 26 \\ \hline \end{array}$$


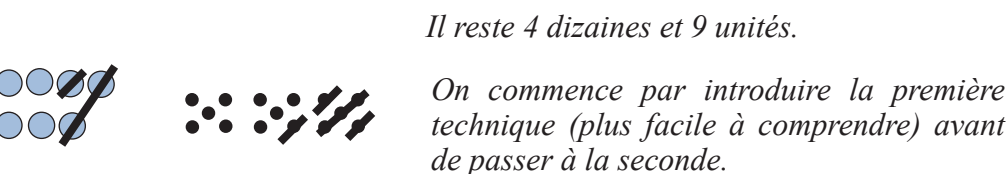
- 3) Pour soustraire 26, on commence par retirer les 6 unités.

$$\begin{array}{r} 715 \\ - 26 \\ \hline 9 \end{array}$$


- 4) Il faut maintenant retirer les 10 unités qu'on a ajoutés. Nous allons retirer une dizaine.

$$\begin{array}{r} -1715 \\ - 26 \\ \hline 9 \end{array}$$


- 5) Pour finir de soustraire 26, on retire les 2 dizaines des 6 dizaines restantes.

$$\begin{array}{r} -1715 \\ - 26 \\ \hline 49 \end{array}$$


Application

Addition

Consigne : Monsieur Prosper achète pour son fils, Arold un pantalon à 335 G, une chemise à 240 G et une montre à 420 G. Quel est le montant de ses achats ?

Pour trouver le montant total des achats (la somme), on doit additionner les prix des trois articles qui représentent les termes de la somme. On a : $335 \text{ G} + 240 \text{ G} + 420 \text{ G} = \dots \text{ G}$

Posons l'addition :

	Centaines	Dizaines	Unités
	3	3	5
+	2	4	0
+	4	2	0
=		9	5

Pour bien poser une addition, on doit :

- Placer les chiffres de même rang les uns en dessous des autres (comme le montre l'exemple ci-avant).
- Additionner les chiffres de chaque colonne de la droite vers la gauche.

Finalement, monsieur Prosper a dépensé un total de 995 G.

Addition avec retenue(s).

Consigne : Pour la rentrée des classes, Madame Louis achète pour son fils Daniel : un livre d'histoire à 145 G, un livre de grammaire française à 155 G, un livre de mathématiques à 137 G, un livre de sciences expérimentales à 175 G, 12 cahiers à 125 G la douzaine et une boîte d'instruments géométriques à 35 G. Combien ces matériels scolaires ont-ils coûté en à Madame Louis ?

Pour connaître la somme, il faut additionner les prix des différents articles. On doit donc effectuer :

$$145 \text{ G} + 155 \text{ G} + 137 \text{ G} + 175 \text{ G} + 125 \text{ G} + 35 \text{ G} = \dots \text{ G}$$

	Centaines	Dizaines	Unités
	2	3	
+	1	4	5
+	1	5	5
+	1	3	7
+	1	7	5
+	1	2	5
+		3	5
=	7	2 ⁷	3 ²

On commence à effectuer à partir de la colonne de droite.

La somme des chiffres de la première colonne (à droite bien sûr) étant 32. En 32 je pose 2 et je retiens 3.

Je le porte au dessus de la colonne suivante (vers la gauche) et j'effectue la somme dans cette nouvelle colonne en répétant le même processus.

Ces matériels ont coûté à Madame Louis un total de 772 G.

Technique de la soustraction sans retenue

Consigne : Monsieur Hérold a acheté un appareil de radio pour 2350 G. Il l'a revendu pour 2780 G. Quel est le montant du bénéfice qu'il a réalisé ?

La première précaution à prendre est de bien poser les termes de l'opération en posant le plus grand nombre en premier. On opère de la droite vers la gauche.

Son bénéfice est : $2780 \text{ G} - 2350 \text{ G} = \dots \text{G}$.

Posons l'opération :

	Unit. de M.	Centaines	Dizaines	Unités
	2	7	8	0
-	0	3	5	0
=	0	4	3	0

Il a pu réaliser un bénéfice de 430 G

Technique de la soustraction avec retenues.

Première méthode :

Consigne : Monsieur Fritz est allé à l'économat de l'école de sa fille avec 32550 G en poche. Combien lui restera-t-il après y avoir versé 17870 G ?

Puisqu'il s'agit de déterminer un reste, il faut donc penser à effectuer une soustraction.

Posons l'opération :

	Diz. de M.	Unit. de M.	Centaines	Dizaines	Unités
	3	2	5	5	0
-	1	7	8	7	0
=	?	?	?	?	0

Je commence à effectuer de la droite vers la gauche.

Arrivé à la deuxième colonne, je devrais effectuer $5 - 7$ ce qui est impossible.

Pour pouvoir avancer, je casse mes 5 centaines de la façon suivante : 5 centaines = 4 centaines + 1 centaine et comme 1 centaine = 10 dizaines, l'opération à effectuer devient :

	Diz. de M.	Unit. de M.	Centaines	Dizaines	Unités
	3	2	4	15	0
-	1	7	8	7	0
=	?	?	?	8	0

Arrivé à la troisième colonne, le même problème présenté. Je ne peux pas soustraire 8 de 4.

Pour pouvoir continuer, je casse maintenant mes 2 milliers et en tenant compte du fait que 1 millier = 10 centaines, l'opération devient :

	Diz. de M.	Unit. de M.	Centaines	Dizaines	Unités
	3	1	14	15	0
-	1	7	8	7	0
=	?	?	6	8	0

Et le même procédé donne finalement :

	Diz. de M.	Unit. de M.	Centaines	Dizaines	Unités
	2	11	14	15	0
-	1	7	8	7	0
=	1	4	6	8	0

Il lui reste 14680 G

Deuxième méthode :

Madame Ménard devait 35250 G à Madame Edmond. Elle lui donne un chèque de 23775 G. Combien doit-elle verser en espèces pour s'acquitter de sa dette ?

Mise en œuvre

Etant donné qu'il s'agit de calculer un reste, on doit recourir à une soustraction.

Elle doit verser : $35250 \text{ G} - 23775 \text{ G} = \dots \text{ G}$

Posons la soustraction :

	Diz. de M.	Unit. de M.	Centaines	Dizaines	Unités
	3	5	2	5	0
-	2	3	7	7	5
=	?	?	?	?	0

Ne pouvant pas soustraire 5 de 0, j'emprunte 1 dizaine, je l'ajoute à 0 et je les rends en bas de la colonne suivante (1 dizaine = 10 unités). D'où l'opération :

	Diz. de M.	Unit. de M.	Centaines	Dizaines	Unités
	3	5	2	5	10
-	2	3	7	8	5
=	?	?	?	?	5

La difficulté rencontrée dans la première colonne refait surface dans la deuxième colonne. Cette fois-ci, j'ajoute une centaine = 10 dizaines aux 5 dizaines et je rends cette centaine à aux 7 centaines du bas de la colonne immédiatement à gauche. On obtient :

	Diz. de M.	Unit. de M.	Centaines	Dizaines	Unités
	3	5	2	15	10
-	2	3	8	8	5
=	?	?	?	7	5

Pour pouvoir effectuer la différence entre les centaines, j'ajoute 10 centaines aux 2 centaines initialement données et je rends ces 10 centaines aux 3 milliers de la colonne des milliers. On obtient alors :

	Diz. de M.	Unit. de M.	Centaines	Dizaines	Unités
	3	5	12	15	10
-	2	4	8	8	5
=	1	1	4	7	5

Elle doit verser 11475 G en espèce pour s'acquitter de sa dette.

❖ Quand introduire le vocabulaire spécifique (plus, moins, égal) et les signes opératoires ?

Les notions : « réunir, mettre ensemble, enlever, le total » doivent être acquises avant cette introduction. Cela veut dire que l'on donnera à résoudre aux élèves des petits problèmes additifs et soustractifs en les laissant travailler en langage naturel : 3 et 2, ça fait 5.

On introduira ce langage symbolique pour institutionnaliser des notions déjà acquises .

ACTIVITE 7 : POUR INTRODUIRE LES SIGNES + ET =

Les élèves sont groupés par 2, le maître leur demande par 2 d'aller chercher chacun des cailloux. Il faut que les 2 élèves aient ensemble 5 cailloux.

Puis il leur demande toutes les façons d'obtenir 5 cailloux.

Quand les élèves disent « 3 cailloux et 2 cailloux, ça fait 5 cailloux », il reprend :
« Oui, $5=3+2$ ».

Il écrit ainsi sur une affiche l'une en dessous de l'autre toutes les façons d'obtenir 5. Il recommence les jours suivants pour obtenir les résultats de la table d'addition (nombres inférieurs à 20).

4- Quels obstacles ? Quelles difficultés ?

- Les élèves ont recours systématiquement à l'addition. Ils pensent qu'il faut faire la somme de tous les nombres d'un problème.

Il s'agit d'un **obstacle didactique** c'est à dire créé par l'enseignement lui-même. Cela vient de présenter uniquement des situations d'addition pendant trop longtemps. L'élève construit la représentation que c'est la seule opération possible et a du mal à intégrer la soustraction.

Dès le début de la scolarité, on peut proposer des problèmes additifs ET soustractifs avec de très petits nombres. Par la suite, quand ils ont acquis la technique de l'addition, ils peuvent utiliser plusieurs procédures pour résoudre des problèmes soustractifs avant d'étudier la technique opératoire de la soustraction.

- Les élèves ont du mal à passer de l'addition à trou à la soustraction. Dans les situations où on enlève, ils pensent à effectuer une soustraction mais dans les situations de complément, ils restent à l'addition à trou.

Il s'agit d'un obstacle lié au **sens de l'opération**. Le sens de la soustraction regroupe plusieurs types de situations.

- ♦ des situations où on enlève : Paul a 10 images, il en donne 6 à Pierre.
- ♦ des situations partie-tout : Dans l'école, il y a 10 enseignants dont 6 maîtres.

- ♦ des situations de comparaison : Cynthia a 10 gourdes, son frère en a 6.

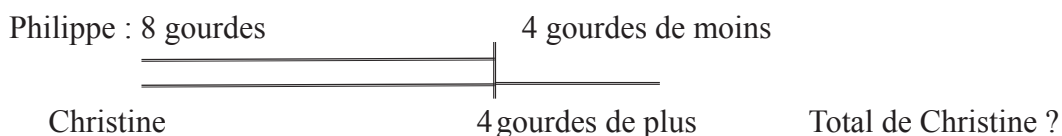
Les situations partie-tout font beaucoup penser à l'addition. Les élèves font des additions à trou. *On peut aider l'élève à construire la relation entre addition à trou et soustraction en se servant du matériel. Le maître fait réunir une collection de 10 cailloux et explique que cela représente tous les enseignants. Puis il dit : « Maintenant les maîtres vont s'en aller. Allez-y, enlevez-les. Qui reste-t-il ? » Il met en évidence que dans une situation partie-tout, on fait « comme si », on enlevait une des parties.*

- Les élèves prennent **des indices dans les mots** des problèmes pour choisir l'opération à effectuer. Ils effectuent une addition quand ils rencontrent les mots « ajoute, en plus, gagne, en tout » et une soustraction quand ils rencontrent les mots « enlève, en moins, perd, reste ».

C'est un obstacle lié au **sens de base** de ces deux opérations mais il est en partie **renforcé par des pratiques d'enseignement** où on propose toujours les mêmes types de problèmes.

Progressivement et tout particulièrement à partir de la 3ème et 4ème année, on proposera tous types de problème avec des mots inducteurs qui peuvent aller à l'encontre des représentations des élèves. Par exemple : Philippe a 8 gourdes, il a 4 gourdes de moins que Christine. Combien a Christine ?

Au moment de la résolution de ces problèmes, on fera aussi un travail spécifique sur le langage. On fera repérer aux élèves la difficulté et on leur fera trouver plusieurs formulations : Christine a 4 gourdes de plus. Il peut être intéressant de leur faire schématiser la comparaison.



- Les élèves ne comprennent pas le sens du signe =. Leur représentation est qu'il sert à donner le résultat d'une opération.

Dans « $10-6=4$ », ils ne voient pas les deux écritures équivalentes. Cela conduit à des enchaînements d'opérations avec des écritures fausses où le signe = est utilisé comme une transcription de l'oral : $42+8=50-21=29$. L'élève a retranscrit un calcul de tête: 42 plus 8 égal 50 moins 21 égal 29.

On peut proposer aux élèves des égalités fausses à rétablir. Par exemple $8+5=15$ ____ Comment compléter cette égalité pour la rendre vraie ?

- **Soustraction** : difficulté fréquente : soustraire plus petit chiffre au plus grand même si le plus grand chiffre fait partie du nombre à soustraire. Les élèves inversent le sens de la soustraction au lieu d'utiliser la technique de la retenue.
- **Soustraction** : La première technique de retenue (où on casse la dizaine) est plus facile à comprendre et est plus proche du sens de la soustraction.

5 - Activité d'évaluation

On peut demander aux étudiants-maîtres de proposer des exercices de même type qu'ils auraient pu proposer à leurs élèves dans leur propre classe.

On peut leur demander aussi : Quelles sont les erreurs (par exemple dans de l'addition avec retenue(s)) auxquelles on s'attend le plus souvent ?

On peut leur demander ensuite d'interpréter ces erreurs éventuelles.

ACTIVITE 8 : DECOMPOSITION DES NOMBRES AU DESSOUS DE 10

Objectifs : Réaliser des décompositions de nombre.

Prendre conscience qu'il existe plusieurs possibilités pour décomposer un nombre

Introduire le signe +

Fixer progressivement les décompositions des nombres en dessous de 10.

Préparer la compréhension des situations d'addition et de soustraction.

Matériel : Par binôme : une boîte de cartes- nombres, 10 fèves (élèves A), 10 haricots (élèves B) Un plateau en papier ou carton.

SEANCE 1 : DECOUVERTE

ETAPE 1

Le professeur lève le carton du 4. Il demande aux élèves de montrer un carton correspondant. puis de le poser sur la table , côté points visible.

Consigne : *Vous sortez de la boîte un carton de 4. Un seul pour deux élèves. Vous le posez sur la table entre vous. Il faut qu'on voie les points.*

Les enfants réalisent une collection de 4 graines composée de fèves et de haricots. Toutes les décompositions de 4 sont admises.

Vérification : Les élèves posent les graines sur les points. Pour que ce soit réussi, il faut une graine par point.

Consigne : *Ensemble, vous allez poser 4 graines sur le plateau. Ceux qui ont des fèves mettent des fèves, ceux qui ont des haricots mettent des haricots. En tout, ça doit faire 4. Vous comptez ensemble pour voir si vous êtes d'accord.*

A la fin, pour voir si vous avez juste, vous posez les graines sur les points.

Le professeur demande les résultats obtenus pour chaque binôme. Il vérifie que tout le monde entend bien. Si des résultats différents sont obtenus (2 fèves et 2 haricots , 3 fèves et un haricot), il le fait remarquer à toute la classe.

ETAPE 2 :

Les élèves réalisent une décomposition du nombre 4 différente de la première. C'est plus difficile pour eux car ils se bloquent sur ce qu'ils ont découvert en premier.

La vérification est toujours faite de la même manière.

Consigne : *Vous allez poser encore 4 graines sur le plateau. Mais, il faut trouver une autre solution. Par exemple, si vous avez mis 2 fèves et 2 haricots, il faut mettre autre chose mais il faut que ça fasse aussi 4.*

Le professeur fait exprimer les résultats trouvés. il écrit au fur et à mesure les différentes possibilités au tableau.

0 fève et 4 haricots
1 fève et 3 haricots
2 fèves et 2 haricots
3 fèves et 1 haricot
4 fèves et 0 haricot

ETAPE 3

Le professeur demande le carton du 5. Il vérifie que c'est le bon carton qui est proposé par les élèves. Il demande de le poser sur la table, côté points visible. Il demande de réaliser une décomposition de 5 avec des fèves et des haricots. Il rappelle qu'il y a plusieurs possibilités. Les élèves réalisent la collection de graines et vérifient avec la carte.

Consigne : Prenez le carton du 5 et posez-le sur la table. Nous allons recommencer ce travail avec 5 graines. Il y a plusieurs solutions.

Mise en commun : L'enseignant note les réponses comme précédemment et introduit à côté l'écriture additive :

Par exemple : 3 haricots et 2 fèves 3+2

Le professeur note toutes les réponses possibles dans l'ordre où elles sont données par les élèves.

SEANCE 2 : La maison des 4

ETAPE 1 :

Le professeur rappelle le travail de la veille : on peut faire des collections de 4 graines ou de 5 graines de plusieurs façons. Il demande de sortir le carton de 4 points pour vérification. Puis il demande aux élèves, par binômes, de réaliser des collections différentes de 4 graines et de les placer l'une en dessous de l'autre sur la table. Le carton de 4 points sert pour vérifier le total de 4 si besoin est.

Consigne : Vous vous rappelez ce que nous avons fait hier ? Vous avez fait des paquets de 4 graines sur la table. Mais tous les élèves n'ont pas trouvé la même solution : il y a plusieurs solutions. Aujourd'hui, vous allez essayer de trouver toutes les solutions possibles pour faire des paquets de 4 graines. Vous laissez sur la table toutes les solutions que vous avez trouvées.

Les élèves réalisent cette recherche par binômes. Pour la mise en commun, le professeur va organiser les réponses. Il écrit au tableau :

0 fève et et demande aux élèves de compléter la réponse :

0 fève et 4 haricots. Il écrit à côté : $4 = 0 + 4$

Il recommence pour chaque solution de façon organisée :

1 fève et 3 haricots	$4 = 1 + 3$
2 fèves et 2 haricots	$4 = 2 + 2$
3 fèves et 1 haricot	$4 = 3 + 1$
4 fèves et 0 haricot	$4 = 4 + 0$

ETAPE 2 : Complémentation

Les élèves n'ont plus les cartons. Ils travaillent individuellement. Les collections de fèves et de haricots sont au milieu de la table. Chacun des deux élèves peut puiser dedans. Les égalités sont écrites au tableau.

Consigne : Placez une fève sur la table devant vous. Maintenant, rajoutez des haricots pour avoir 4 graines. Combien ai-je rajouté de haricots ?

Les élèves réalisent la tâche. Le professeur interroge quelques élèves. A chaque fois, il montre le résultat correspondant : $4 = 1 + 3$

Le professeur fait réaliser plusieurs situations de ce type en donnant d'autres nombres pour débiter : par exemple : 3 fèves, combien de haricots ? Ou 2 haricots, combien de fèves ? Le total est toujours de 4 graines.

ETAPE 3 : Anticipation du complément

Le professeur propose une situation en donnant un nombre de fèves ou de haricots. Il demande aux élèves de ne pas placer tout de suite les autres graines sur la table pour compléter mais de donner d'abord la réponse.

Consigne : Placez deux fèves sur la table devant vous ? Ne rajoutez pas tout de suite les haricots. Répondez d'abord. Combien de haricots doit-on ajouter pour avoir 4 graines ?

Le professeur interroge quelques élèves sans donner la réponse. Puis il demande aux élèves de placer les haricots pour vérifier. Il montre au tableau l'égalité correspondante $4 = 2 + 2$

Les élèves réalisent plusieurs situations de ce type avec 4 graines. A chaque fois, après la vérification, le professeur montre au tableau l'égalité correspondante et la dit à voix haute.

ETAPE 4 : Systématisation

Devant les élèves, le professeur écrit sur un grand papier les égalités de la « maison des 4 ». Il efface les autres écritures (fèves et haricots) et demande aux élèves de ranger les graines. Il écrit au tableau des égalités auxquelles il manque un des nombres. Par exemple

$$4 = \underline{\quad} + 1 \quad \text{ou} \quad \underline{\quad} = 2 + 2 \quad \text{ou} \quad 4 = 2 + \underline{\quad}$$

Les élèves doivent lever le carton correspondant au nombre manquant. Ils peuvent s'aider de la maison des 4.

Le professeur propose plusieurs situations de calcul avec 4.

SEANCES SUIVANTES : Chacun des nombres suivants (5, 6, 7, 8, 9, 10) seront travaillés suivant les mêmes étapes. 1, 2, 3, et 4 de la séance 2

PROLONGEMENT

ACTIVITE 9 : ACTIVITE EN AUTONOMIE

Activité en autonomie pendant que le professeur est occupé avec un autre groupe.

Objectifs : Fixer les résultats des décompositions des nombres plus petits que 10

Pour certains élèves, achever la compréhension de la situation

Matériel : Une boîte contenant des bouts de papier sur lesquels le maître a écrit des égalités auxquelles il manque un nombre (voir étape 4). Par exemple $8 = ___ + 5$

Pour chaque enfant, des cartes de nombre et deux collections de 10 graines.(fèves et haricots)

Déroulement : Chaque élève tire un papier avec une égalité incomplète. Il doit sortir le carton correspondant au nombre manquant. Il peut s'aider des « maisons des nombres » affichées dans la classe. Ensuite, il vérifie en posant les nombres correspondants de fèves et de haricots. Il va ensuite ranger le papier et en tire un autre.

Durée : 1 /4 heure par jour pendant un mois puis ¼ heure par semaine jusqu'à ce que les élèves réalisent cette activité très rapidement.

ACTIVITE 10 : REUNION DE COLLECTIONS

Matériels : cailloux

Consigne : Un enfant met des cailloux au nombre de 9 dans une main de la maîtresse, il les compte à haute voix. un autre enfant fait de même dans l'autre main en mettant 7 cailloux. La maîtresse rejoint ses mains en mettant le tout dans une boîte vide et dit "Chers enfants, combien y a-t-il de cailloux dans la boîte?".

Remarque : La validation se fait par dénombrement des cailloux.

Cette opération a deux interprétations :

1. On a réuni les deux collections de cailloux ensemble pour obtenir une seule collection ayant un plus grand nombre de cailloux.
2. On a ajouté un nombre donné (9) à un nombre donné (7) pour obtenir un nouveau nombre (16).

L'opération qui consiste à ajouter plusieurs nombres est appelée « addition », les nombres que l'on ajoute sont appelés « termes » et le résultat obtenu est appelé somme.

On écrit alors : $9+7=16$. Le symbole + situé entre les deux nombres est le signe de l'addition ; on l'appelle « plus ».

ACTIVITE 11 : REMISE DE MONNAIE

Consigne : Madame Roger est allée faire des achats à la boutique de madame Alix, elle achète une marmite de riz pour 135 gourdes, une bouteille d'huile de cuisine pour 40 gourdes, des haricots pour 220 gourdes et un petit pot de beurre de cuisine pour 70 gourdes. Elle lui donne un billet de 1000 gourdes Quelle somme Madame Alix doit-elle remettre à madame Roger ?

Mise en œuvre

- 1) Pour pouvoir rendre la monnaie à madame Roger, madame Alix doit connaître le montant total des achats de madame Roger. Quelle opération utilisée à cette fin ?
- 2) Le montant des achats étant connu, quelle opération doit-elle utiliser pour déterminer le montant de la monnaie à rendre à madame Roger ?
- 3) Qu'est ce qui peut arriver si madame Alix ne maîtrise pas ces opérations ?

C- MULTIPLICATION ET DIVISION

Objectifs :

Savoir ce qu'est la multiplication et quelles sont ses propriétés. Connaître les différentes situations de multiplication. Savoir ce qu'est la division. Comprendre le rapport entre la multiplication et la division.

Connaître les différentes situations de division. Mettre en place une séquence pour construire le sens de la multiplication à partir de l'addition répétée. Mettre en place une séquence pour construire la technique opératoire de la multiplication. Mettre en place des séquences pour construire les techniques opératoires de la division.

1- Mise en situation des étudiants-maîtres

Les étudiants-maîtres, par groupes, résolvent le problème suivant.

Dans une école, il y a entre 500 et 600 élèves. Le directeur inscrit les élèves dans un registre, il inscrit 38 élèves par page.

Il constate qu'il y a 5 élèves inscrits sur la dernière page.

Il inscrit les élèves sur un autre registre où on peut inscrire 27 élèves par page. Il constate qu'il y a 19 élèves sur la dernière page.

Combien y a-t-il d'élèves dans cette école ?

2- Structuration

Il s'agit d'une situation de divisions euclidiennes où on ne connaît pas le nombre qui est divisé.

Nombre d'élèves = $(38 \times \text{nb pages registre 1}) + 5$

Nombre d'élèves = $(27 \times \text{nb pages registre 2}) + 8$

On cherche donc les multiples de 38 et 27 situés entre 500 et 600.

Cela peut se faire de façon systématique :

➤ recherche de tous les multiples de 38 situés entre 500 et 600 : $38 \times 14 = 532 - 570$

➤ recherche de tous les multiples de 27 situés entre 500 et 600 : $513 - 540 - 567 - 594$

De plus, les nombres recherchés ne sont pas des multiples mais des multiples auxquels on doit ajouter le reste.

$$532 + 5 = 537$$

$$570 + 5 = 575$$

$$513 + 8 = 521$$

$$540 + 8 = 548$$

$$567 + 8 = 575$$

Nous constatons que le nombre 575 est présent 2 fois. C'est le seul nombre dans ce cas.

$$(38 \times 15) + 5 = 575$$

$$(27 \times 21) + 8 = 575$$

Peut-être, les étudiants-maîtres n'ont pas procédé de façon systématique. Ils peuvent avoir essayé un peu « au hasard » des nombres et constaté qu'ils se situent en dehors ou dans la fourchette 500 – 600. Ils ont pensé à rajouter les restes ou bien ont oublié cette donnée.

Ce procédé (par essais, erreurs) est intéressant car il permet aux apprenants d'explorer le problème en partant de ce qu'ils en comprennent. Nous le reverrons dans la partie problème.

Progressivement, les participants éliminent des possibilités et s'assurent que toutes les directions ont été vues et qu'ils peuvent être sûrs de la réponse.

- Pour résoudre ce problème, on doit comprendre qu'on est devant une situation de division inversée et la « décortiquer ».
- On doit mettre en place une stratégie de résolution : ici, repérer l'importance de calculer les multiples.
- Le problème est basée sur la structure de la division euclidienne : Dividende = (diviseur x quotient) + reste.

3- Apports

La multiplication

On utilise une multiplication quand on additionne plusieurs fois le même nombre :

La multiplication est une **addition répétée** :

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3$$

C'est la somme 5 fois de nombres égaux à 3

C'est 5 fois 3

C'est 3 multiplié par 5 : multiplié par 5 veut dire répété 5 fois

On note cette addition répétée : 3×5

Configuration rectangulaire

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2								
3								
4								
5								
6								
7								

Soit à compter le nombre de carreaux contenus dans ce rectangle, je peux affirmer qu'il contient 7 rangées de 9 carreaux. Je peux procéder par **additions itérées** : $9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 63$ ou encore $7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 63$.

L'opération qui permet de calculer plus rapidement le nombre de carreaux est la multiplication. On note alors $7 \times 9 = 63$ et on lit « 7 fois 9 = 63 »

Cette opération remplace une addition répétée dont tous les termes sont égaux.

Le signe de la multiplication est ' $\times$ ' (multiplié par).

Le résultat de la multiplication s'appelle « **produit** ».

Dans le produit 7×9 chacun de ces nombres est appelé « **facteur** ».

Quand on doit multiplier deux nombres, l'un est appelé **multiplicande** et l'autre **multiplicateur**.

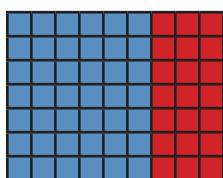
Cet exemple permet de remarquer aussi qu'en permutant les rôles des facteurs le résultat reste le même. On dit que la multiplication est **commutative**.

La configuration rectangulaire permet bien aux élèves de se rendre compte de la commutativité de la multiplication.

Attention : Les mots « commutativité » et « commutative » ne sont pas au programme mais les élèves doivent savoir en pratique que $7 \times 9 = 9 \times 7$

La situation rectangulaire permet aussi de rendre compte de la **distributivité** (le mot n'est pas au programme) de la multiplication .

$$9 = 6 + 3 \text{ donc } 9 \times 7 = (6 \times 7) + (3 \times 7)$$



On utilise cette propriété dans l'addition posée en décomposant les nombres suivant le système de numération : $326 \times 7 = (300 \times 7) + (20 \times 7) + (6 \times 7)$

Produit de 3 termes ou plus:

Soit à multiplier 2 par 6 par 7. On a : $2 \times 6 \times 7 = 84$.

On a aussi $(2 \times 6) \times 7 = 2 \times (6 \times 7) = 84$. On peut constater que le résultat reste le même quelle que soit la façon dont on associe les différents facteurs. Nous traduisons cette propriété en disant que la multiplication est **associative**. On utilise cette propriété par exemple dans les calculs de volume.

Multiplication d'une grandeur par une autre

On considère 4 assiettes de 7 gâteaux

On a des grandeurs différentes : les assiettes et les gâteaux.

On a bien 4 fois 7 gâteaux et pas du tout 7 fois 4 assiettes.

La grandeur multipliée (7) représente la quantité de gâteaux.

Le multiplicateur (4) représente la quantité d'assiettes.

Attention : la situation n'est pas réversible mais la multiplication est toujours commutative : dans 7 assiettes de 4 gâteaux, j'ai autant de gâteaux que dans 4 assiettes de 7 gâteaux.

Cette situation, avec 2 grandeurs différentes, est plus difficile à comprendre que la précédente. Elle met moins en évidence les propriétés de la multiplication.

C'est seulement l'enseignement de la multiplication qui peut permettre aux élèves de comprendre l'égalité des 2 multiplications.

Si on demande à un enfant non scolarisé de dire combien coûtent 3 objets à 50G chacun, il peut généralement répondre en additionnant. Si on lui demande combien coûtent 50 objets à 3G chacun, il ne peut pas répondre. Les additions sont plus longues et difficiles. Il ne voit pas l'égalité de ces deux opérations. (expérience au Mexique auprès d'enfants des rues - Brissiaud)

Situation de comparaison :

Il y a 5 doigts sur la 1ère photo.



Paul mesure 90 cm.

Il y a 8 fois plus de doigts sur la 2ème photo



Pierre est 2 fois plus grand que Paul.

Dans chaque situation, on a une seule grandeur : le nombre de doigts, la longueur.

Le nombre de doigts est multiplié par 8.

La longueur de Paul est multipliée par 2 pour trouver la longueur de Pierre.

Cette situation est la plus difficile. Il s'ajoute une difficulté de langage : l'expression «8 fois plus» fait penser à l'addition plus qu'à la multiplication. Souvent, les élèves font l'erreur d'ajouter 8 au premier nombre.

Technique opératoire de la multiplication

La technique opératoire utilise la propriété de la distributivité.

On décompose chaque nombre suivant les règles de la numération et on multiplie séparément les unités puis les dizaines.

Effectuons 36×8 .

On commence par décomposer 36 en $30 + 6$.

On effectue les produits partiels :

$$6 \times 8 = 48$$

$$30 \times 8 = 240$$

Dans la technique opératoire classique de la **multiplication à 1 chiffre**, on multiplie d'abord les unités puis les dizaines puis les centaines, etc.

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 8 \\ \hline 48 \quad \text{produit partiel } 6 \times 8 \\ \underline{240} \quad \text{produit partiel } 30 \times 8 \end{array}$$

On peut calculer le produit en une seule ligne en utilisant la retenue pour se rappeler des dizaines obtenues :

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 8 \\ \hline 288 \end{array} \quad \begin{array}{l} 8 \text{ fois } 6 = 48 \\ \text{je retiens 4 dizaines} \\ 8 \text{ fois } 30 = 240 \\ 240 \text{ plus } 40 = 280 \end{array}$$

Multiplication avec un multiplicateur à 2 chiffres :

Effectuons 45×23

On utilise la même technique mais les 2 nombres vont être décomposés en dizaines et unités.

$$(40 + 5) \times (20 + 3)$$

Nous obtenons 4 produits partiels : $5 \times 3 = 15$

$$40 \times 3 = 120$$

$$5 \times 20 = 100$$

$$40 \times 20 = 800$$

Dans la technique de la multiplication avec retenues, on regroupe les produits partiels :

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 23 \\ \hline 135 \\ \underline{900} \\ 1035 \end{array}$$

$$45 \times \text{multiplié par } 3 = 135$$

$$(120+15)$$

$$45 \times \text{multiplié par } 20 = 900$$

- ♦ **Application :** Multiplication par un nombre d'un chiffre:

Consigne : Monsieur Fabien travaille 6 jours par semaine à 480 G par jour. Combien gagne-t-il par semaine ?

Son gain hebdomadaire est : $480 \text{ G} \times 6 = \dots \text{ G}$

Posons l'opération:

On procède comme suit :

- ♦ $6 \times 0 = 0$, je le pose.
 - ♦ $6 \times 8 = 48$; en 48 je pose 8 et je retiens 4.
 - ♦ $6 \times 4 = 24$; $24 + 4 = 28$, en 28 je pose 8 et j'avance 2.
- $480 \times 6 = 2880$.

Il gagne 2880 G par semaine.

Multiplication par un nombre de plusieurs chiffres:

Activité

Consigne : Un commerçant achète 24 gros melons à 125 G la pièce. Quelle somme doit-il verser?

La somme est: $115 \times 24 = ?$ G

Posons l'opération :

	U de M	C	D	U	
		1	1	5	 Je multiplie
	x		2	4	
(115x4) =		4	6	0	 J'additionne
(115x20)=2		3	0	.	
=	2	7	6	0	Le résultat de l'opération

On a finalement : $(115 \times 4) + (115 \times 20) = 2760$

- ♦ Mise en œuvre

$115 \times 4 = 460$. Dans les produits partiels, je procède comme pour une multiplication par un nombre d'un chiffre. Sans oublier les retenues.

- ♦ $115 \times 20 = 2300$. On remplace très souvent le zéro de droite par un point.
- ♦ On fait la somme des produits partiels pour trouver le résultat.

La somme versée est ...2760..... G.

Activité d'évaluation

On peut demander à chaque étudiant-maître de proposer une activité pour introduire la notion de multiplication dans sa classe.

La division

Qu'est-ce que la division ?

C'est l'**opération inverse** de la multiplication

Si je sais que $85 \times 5 = 425$, alors je peux être sûr que :

$$425 : 85 = 5$$

$$\text{et } 425 : 5 = 85$$

Cette propriété est intéressante pour vérifier si la division est juste. On réeffectue la multiplication.

Dans le premier cycle, seule la division euclidienne est au programme.

En 5ème et 6ème AF, on effectue des divisions de décimaux.

Qu'est-ce que la division euclidienne ?

C'est la division de nombres entiers avec un reste.

Reprenons notre division, $425 : 5$, le reste est égal à 0 puisque nous avons « retourné » la multiplication.

Si je prends un nombre un peu plus grand : 428, je n'aurai pas assez pour faire un nouveau paquet de 5, j'aurais donc toujours un résultat de 85. Ce résultat s'appelle **le quotient**. J'aurais aussi **un reste de 3**.

$$425 = (85 \times 5) + 3$$

Résoudre une division, c'est chercher les multiples du diviseur.

$$85 \times 5 < 425 < 86 \times 5$$

Le quotient de 425 divisé par 5, c'est le multiple de 5 qui donne un produit plus petit ou égal à 425.

Reprenons les situations évoquées pour la multiplication.

Configuration rectangulaire

Calculer la longueur d'un rectangle à partir de son aire et de sa largeur.

8 m

168m²

Longueur = $168 / 8$

La division permet d'effectuer des **partages équitables**.

Reprenons la situation des gâteaux dans les assiettes. Il y a 21 gâteaux. On veut les répartir équitablement dans des assiettes. Il y a deux cas :

- ♦ On connaît le nombre d'assiettes, on cherche combien il y aura de gâteaux dans chaque assiette.
- ♦ On sait combien on veut mettre de gâteaux dans chaque assiette. On cherche combien d'assiettes on pourra remplir.

Il y a donc deux sortes de situations de divisions-partages :

Celles où on cherche la quantité dans chaque part : **division-quotition**

Celles où on cherche le nombre de parts : **division-partition**

Enseigner les techniques opératoires de la division

On peut aborder les techniques opératoires de la division à partir de situations-problèmes et laisser les élèves explorer et construire des techniques avant d'aborder la disposition pratique. Certains types de problèmes incitent les élèves à recourir davantage à l'une ou l'autre technique. Mais pour une division donnée, toutes les techniques sont possibles. La division comme opération n'est abordée qu'en 3ème AF même si les élèves réalisent des problèmes simples de partage équitable dès la 1ère AF.

♦ Technique par recherche de multiples :

Il est plus facile de travailler à partir d'une situation où on cherche **la quantité dans chaque part**.

Le directeur de l'école a reçu 400 cahiers. Il veut les partager équitablement entre les 7 classes de l'école.

On cherche un multiple de 7 égal ou immédiatement inférieur à 400.

Pour cela, on s'intéresse à l'ordre de grandeur.

$7 \times 10 = 70$, ce n'est pas assez

$7 \times 100 = 700$, c'est trop

Le quotient est donc entre 10 et 100 : il y aura 2 chiffres au quotient.

$7 \times 50 = 350$, c'est assez proche du résultat mais ce n'est pas assez, il manque 50

Je vais chercher un multiple de 7 égal ou proche de 50

$7 \times 7 = 49$

$7 \times 50 = 350$

$7 \times 7 = 49$

$7 \times (50 + 7) = 399$

Le quotient est 57, il reste 1 cahier.

♦ Technique par soustractions successives (au programme en 3ème et 4ème AF)

Il est plus facile de travailler à partir d'une situation où on cherche **le nombre de parts**.

On veut remplir des boîtes de 6 oeufs. On dispose de 71 œufs dans un panier.

Combien de boîtes peut-on remplir ?

A chaque fois qu'on remplit une boîte, on enlève 6 oeufs au panier.

$71 - 6 = 65$

$65 - 6 = 59$

$59 - 6 = 53$

$53 - 6 = 47$

$47 - 6 = 41$

$41 - 6 = 35$

$35 - 6 = 29$

$29 - 6 = 23$

$23 - 6 = 17$

$17 - 6 = 11$

$11 - 6 = 5$

On effectue des soustractions de 6 jusqu'à arriver à un nombre inférieur à 6. Ici, il reste 5 œufs.

On a effectué 11 soustractions.

4. 11 est le quotient.

Technique par disposition pratique (fin de 3ème AF et à partir de la 4ème AF)

On peut enseigner cette technique en utilisant le matériel de numération. Les centaines sont représentées par des grosses capsules, les dizaines par des petites capsules et les unités par des cailloux. On donne du matériel à chaque groupe d'élèves.

Supposons que l'on ait 574 pièces à partager à 3 personnes où chacune d'elles passera chercher ce qui lui revient séparément. Comment déterminer la part de chacune d'elle ?

Les élèves forment le nombre 574 avec le matériel de numération (5 centaines, 7 dizaines et 4 unités). Trois feuilles de papier représentent les lots à former. On demande aux élèves de commencer le partage en trois.

Ils peuvent déjà donner à chacun 1 centaine, 2 dizaines et 1 unité. Il reste 2 centaines, 1 dizaine et 1 unité.

- On échange 2 centaines contre 20 dizaines. On ajoute la dizaine qui restait. Il y a 21 dizaines. On les partage, il y en a 7 pour chaque lot. Chacun a maintenant 1 centaine, 9 dizaines (7+2) et 1 unité. Il reste 1 unité. Le quotient est 191.

Dans cette opération, on n'a pas échangé les dizaines parce que le nombre de dizaines à partager était divisible par 3.



Il est intéressant de proposer plusieurs situations de partage par 2 ou 3 avec le matériel de numération avant d'introduire la division posée. En effet, la technique opératoire est basée sur la division successive de chaque classe de nombres. A chaque étape, on transforme le reste (centaines en dizaines, dizaines en unités).

- On partage les centaines, il y a 1 centaine au quotient et il reste 2 car $(1 \times 3) + 2 = 5$

On transforme les 2 centaines restantes en 20 dizaines et on ajoute les 7 dizaines du début, on partage 27 dizaines. Il y a 9 dizaines au quotient car $(9 \times 3) = 27$

- On n'a pas de dizaines à transformer. On partage 4 unités. Il y a 1 unité au quotient car $(1 \times 3) + 1 = 4$. Il reste 1.

$(191 \times 3) + 1 = 574$ Le quotient est 191. Le reste est 1

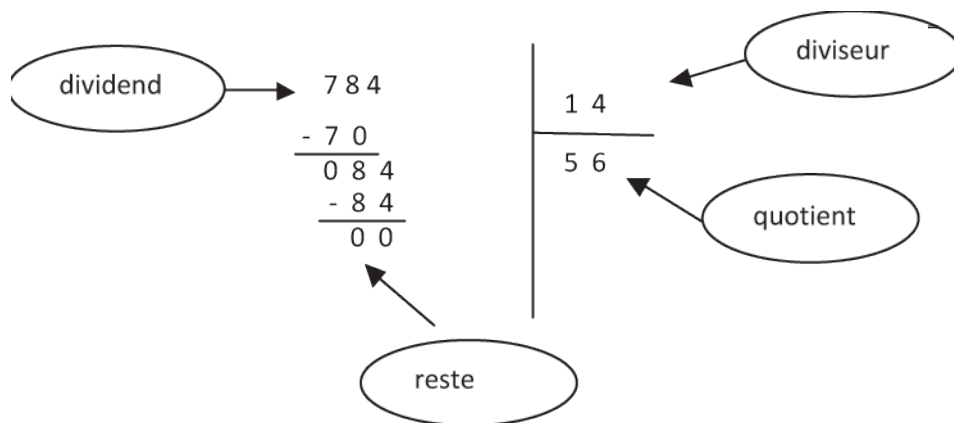
$$\begin{array}{r}
 574 \overline{) 3} \\
 \underline{-3} \\
 27 191 \\
 \underline{-27} \\
 04 \\
 \underline{-3} \\
 1
 \end{array}$$

Supposons que l'on ait 784 pièces à partager à 14 personnes où chacune d'elles passera chercher ce qui lui revient séparément. Comment déterminer la part de chacune d'elle ?

Le nombre 784 peut s'écrire de la façon suivante : $784 = 7 \text{ centaines} + 8 \text{ dizaines} + 4 \text{ unités}$.

- ♦ On ne peut pas partager 7 centaines en 14.
- ♦ On partage donc les 78 dizaines.
- ♦ On divise 78 par 14. Le plus grand multiple de 14 contenu dans 78 étant $70 = 14 \times 5$, on a $78 = (14 \times 5) + 8$.
- ♦ On a donc 5 dizaines au quotient et il reste 8 dizaines à partager.
- ♦ On transforme 8 dizaines en 80 unités et on ajoute les 4 unités du début.
- ♦ On divise 84 par 14. On a $84 = (14 \times 6) + 0$.
- ♦ **On a 6 unités au quotient et il reste 0.**

Posons la division.



Puisque le reste vaut zéro, la division dite sans reste, ou encore 784 est un multiple de 14. Dans ce cas, le quotient est dit exact.

Deuxième exemple : Effectuons la division de 7428 par 15.

On divise d'abord 74 centaines par 15 ce qui conduit à l'égalité :

$$74 = 4 \times 15 + 14.$$

Il vient, en multipliant par 100 : $7400 = 400 \times 15 + 1400$.

Il y a 4 centaines au quotient (400) et il reste 14 centaines (1400)

On ajoute les 2 dizaines du début. On a 1420 soit 142 dizaines.

$$\text{Ensuite, } 7428 = 400 \times 15 + 1400 + 28 = 400 \times 15 + 1428$$

On divise à présent 142 par 15 pour obtenir l'égalité : $142 = 9 \times 15 + 7$. On obtient en multipliant par 10 : $1420 = 90 \times 15 + 70$

Il y a 9 dizaines au quotient (90) et il reste 7 dizaines (70).

On ajoute les 8 unités du début. On obtient 78 unités. On divise enfin 78 par 15 ce qui conduit à l'égalité : $78 = 5 \times 15 + 3$.

$$\text{Il s'ensuit que : } 7428 = (15 \times 400) + (15 \times 90) + (15 \times 5) + 3$$

$$\text{D'où l'égalité : } 7428 = (15 \times 495) + 3$$

Posons la division

$$\begin{array}{r}
 7428 \quad | \quad 15 \\
 \underline{-60} \quad \downarrow \\
 142 \quad \downarrow \\
 \underline{-135} \quad \downarrow \\
 0078 \quad \downarrow \\
 - 75 \\
 \underline{03}
 \end{array}$$

Dans ce cas le quotient est non-exact parce que le reste est différent de zéro.

4) Activités d'évaluation

- ♦ Les étudiants-maîtres proposent des activités pour introduire les diverses techniques opératoires.
- ♦ Le formateur présente des divisions avec des erreurs. Il demande aux étudiants-maîtres d'interpréter ces erreurs et de proposer des remédiations.
- ♦ Les étudiants-maîtres proposent une progression pour la multiplication et la division de la 1ère à la 6ème AF en utilisant diverses variables.
- ♦ Les étudiants-maîtres construisent des exercices d'entraînement de multiplication et de division de difficulté variable de la 2ème à la 6ème AF.

5) Activités de classe

ACTIVITE 12 : MULTIPLICATION ET QUADRILLAGE

1ère à 3ème AF

Pendant toute cette séquence, nous allons utiliser le quadrillage qui permet de faire comprendre ce qu'est une multiplication et de mettre en valeur ses propriétés.

SEANCE 1 :

Trouver le nombre de carreaux d'un quadrillage à partir d'additions répétées

Matériel : par groupe de 2 élèves : une feuille de papier quadrillé, un crayon, une règle, des ciseaux.

L'enseignant partage la classe en 2 grands groupes égaux. Chaque groupe est face à un tableau ou face à un côté du tableau. On appelle ces groupes A et B. Ils vont avoir à faire une tâche différente. L'enseignant a quadrillé chaque côté du tableau

L'enseignant explique successivement le travail à chacun des groupes A et B.

ETAPE 1

Chaque binôme a une feuille de papier quadrillé. Les élèves découpent des figures (carré et

rectangle) en suivant les carreaux : carré de 2×2 et rectangle de 4×2 pour le groupe A, carré de 3×3 et rectangle de 2×3 pour le groupe B. Leur préciser de ne pas découper bord à bord les 2 figures. Ils comptent les carreaux de chaque figure et inscrivent le résultat au dos.

ETAPE 2

Ils échangent ensuite la feuille quadrillée découpée avec un binôme de l'autre groupe.

L'autre binôme doit déterminer le nombre de carreaux de la figure découpée.

Les élèves confrontent ensuite ce qu'ils ont trouvé à la figure découpée réelle pour validation.

Les élèves disposent de la feuille découpée. Ils doivent se représenter les cases manquantes. Ce travail leur est facilité parce qu'ils ont compté les cases dans l'étape 1. Pourtant, ils peuvent faire des erreurs.

L'erreur la plus courante consiste à compter les cases visibles du tour. Pour le premier rectangle, ils vont trouver 4 ou 5 suivant qu'ils comptent la case du coin ou non. S'ils répondent 4, ils peuvent donner la bonne réponse avec une procédure fausse. Mais l'erreur va apparaître avec le deuxième rectangle.

ETAPE 3 :

Synthèse : Création du répertoire multiplicatif

L'enseignant interroge quelques binômes de chaque groupe et leur demande quels résultats ils ont obtenu et comment ils ont fait. Les groupes qui ont réussi ont « quadrillé dans leur tête » l'espace vide en le divisant en lignes ou en colonnes. Les deux procédures sont possibles. Les élèves expliquent par exemple qu'ils compté 4 et 4 en mimant les colonnes verticalement. L'enseignant peut alors demander si certains ont fait autrement. Si la réponse « 2 et 2 et 2 et 2 » ne vient pas, il peut demander si certains ont procédé de cette façon. Il peut faire tourner les rectangles pour montrer les 2 manières de calculer.

Attention : Souvent, les élèves disent « et » pour dire « plus ». Ils passent progressivement du langage naturel au langage mathématique. Cela les aide à se représenter la situation. L'enseignant ne les corrige pas mais reformule en utilisant le mot mathématique « plus ».

Pour chaque rectangle, l'enseignant écrit sur une grande feuille les résultats trouvés avec les calculs et les schémas des rectangles. Ce sera le début du répertoire multiplicatif de la classe.

$$4 = 2 + 2$$

$$6 = 3 + 3 = 2 + 2 + 2$$

$$8 = 4 + 4 = 2 + 2 + 2 + 2$$

$$9 = 3 + 3 + 3$$

SEANCE 2 : Introduction de l'expression « fois » et du signe $\times$ (signe $\times$ seulement pour les 2ème et 3ème AF)

Matériel : Même matériel qu'à la séance 1. Le répertoire multiplicatif créé au cours de la séance 1 est affiché. Il sera complété au cours de cette séance.

ETAPE 1 :

Même démarche qu'à la séance 1. Les élèves sont en 2 groupes A et B et en binômes. L'enseignant leur demande de tracer des rectangles. SI les élèves ont eu des difficultés importantes au cours de la séance 1, il peut reproposer les mêmes rectangles ou carrés. Sinon, il demande au groupe A de tracer un rectangle de 5 carreaux sur 2 carreaux et un autre de 6 carreaux sur 2

carreaux . Au groupe B , il demande un rectangle de 4 carreaux sur 3 carreaux et un rectangle de 2 carreaux sur 7 carreaux.

Nous voyons que le produit 12 va être décomposé de 2 façons différentes :

4×3 et 2×6

Consigne : Vous allez tracer les rectangles et les découper comme la dernière fois. Cette fois-ci, vous allez écrire derrière combien il y a de cases et aussi comment on peut faire pour le calculer en additionnant combien il y en a dans chaque ligne ou bien combien il y en a dans chaque colonne. Vous l'écrivez des deux façons comme sur l'affiche (l'enseignant montre le répertoire multiplicatif affiché)

Avec l'expérience de la séance 1, les élèves sont incités à calculer par lignes ou colonnes plutôt que de recompter. De plus, le nombre de cases est plus élevé que dans la séance 1.

ETAPE 2 :

Même démarche que dans la séance 1. Les élèves vont plus vite car ils savent comment procéder.

ETAPE 3 : Synthèse : Au cours de la synthèse, l'enseignant va introduire l'expression « fois » et le signe $\times$ (signe $\times$ pour les élèves de 2ème année)

Pour chaque rectangle, l'enseignant demande les résultats obtenus et les calculs effectués .

Pour 10, quand l'élève explique que 10, c'est $2 + 2 + 2 + 2 + 2$, il lui demande :

- Combien de fois as-tu écrit 2 ?

- Je l'ai écrit 5 fois

- A la place de $2 + 2 + 2 + 2 + 2$, on peut dire 5 fois 2

L'enseignant continue le répertoire multiplicatif de cette manière :

$$10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 5 + 5 = 5 \text{ fois } 2 = 2 \text{ fois } 5$$

$$12 = 3 + 3 + 3 + 3 = 4 + 4 + 4 = 4 \text{ fois } 3 = 3 \text{ fois } 4$$

$$12 = 6 + 6 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 2 \text{ fois } 6 = 6 \text{ fois } 2$$

$$= 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 7 + 7 = 7 \text{ fois } 2 = 2 \text{ fois } 7$$

En 2ème AF, l'enseignant écrira $5 \times 2 = 2 \times 5$

- ♦ L'enseignant reprend avec les élèves le début du répertoire multiplicatif pour le compléter de la même façon. Il interroge les élèves : $4 + 4$, c'est combien de fois 4 ?

- ♦ Il fait constater qu'un des deux nombres du produit est le nombre répété (ici 4) et que l'autre n'est pas visible mais est obtenu en comptant le nombre de fois que le nombre écrit est répété. Il écrit $4 \text{ fois } 2 = 2 \text{ fois } 4$ ou $4 \times 2 = 2 \times 4$

- ♦ Il complète tout le répertoire multiplicatif de la même façon.

Entraînement :

- ♦ L'enseignant propose des multiplications à transformer en additions réitérées ou l'inverse. Si les élèves sont en première année, il utilise seulement l'expression « fois ». Si les élèves sont en 2ème ou 3ème AF, il utilise « fois », « multiplié par » et le signe « $\times$ »

Exemple d'addition répétée à transformer en multiplication: $3 + 3 + 3 + 3 + 3 =$

Si les élèves ont des difficultés, l'enseignant dit qu'un des nombres de la multiplication est visible. Lequel ? Il ajoute que l'autre nombre est caché, il faut compter combien de fois le 3 est répété.

Exemple de multiplication à transformer en addition répétée : $4 \times 5 =$

Si les élèves ont des difficultés, l'enseignant dit qu'il faut choisir un des nombres (le 4 ou le 5) pour le répéter. Si on choisit le 4 comme nombre visible, il faut le répéter 5 fois)

SEANCE 3 : Tracer des rectangles en connaissant le nombre de cases. Utilisation du répertoire multiplicatif. Enrichissement du répertoire multiplicatif

Matériel : Même matériel

ETAPE 1:

Aujourd'hui, vous allez tracer des rectangles mais c'est vous qui allez trouver comment les tracer en vous aidant de l'affiche. Vous allez d'abord tracer un rectangle qui a 12 cases.

Si les élèves demandent quel calcul utiliser (il y a 2 lignes sur l'affiche avec le résultat $12 : 4 \times 3$ et 2×6), l'enseignant répond de choisir le calcul qu'on veut. Il ne montre pas de quels calculs il s'agit. Les élèves tracent le rectangle. L'enseignant fait venir des élèves au tableau pour tracer le rectangle et écrire à côté le calcul correspondant .Il fait remarquer que, pour certains nombres, il y a 2 possibilités.

ETAPE 2 :

Consigne : *Maintenant, vous allez chercher un nombre qui n'est pas sur l'affiche.*

Vous allez chercher à faire un rectangle qui a 15 cases. Vous pouvez partir du rectangle de 12 cases.

Les élèves cherchent et arrivent à l'idée qu'il faut ajouter 3 cases. Le seul moyen est d'ajouter un rectangle de 3 carreaux sur 1 carreau. Cette technique permet de familiariser les élèves avec les propriétés de la multiplication.

ETAPE 3 : Recherche par différentes manières. Enrichissement du répertoire multiplicatif.

L'enseignant complète le répertoire multiplicatif avec le nombre 15 de la manière habituelle. Il interroge les élèves pour leur faire trouver les différentes écritures.

Puis, il demande aux élèves d'observer l' affiche et les interroge.

- *Quel est le plus grand nombre de l'affiche ? Réponse attendue : 15*

- *Quel est le plus petit nombre ? Réponse attendue : 4*

- *Est-ce qu'il y a tous les nombres en –dessous de 15 ? Non*

- *Est-ce qu'on peut trouver des rectangles pour les autres nombres, par exemple pour 3 ? Pendant l'étape précédente nous avons utilisé un rectangle de 3 cases.*

On peut trouver des rectangles correspondant à tous les nombres si ils font un carreau de largeur. Ces sont les écriture 1×1 , 1×2 , 1×3 , etc. On mettra cela en évidence avec les élèves. On n'écrit pas ces nombres sur l'affiche pour ne pas la surcharger. On fait remarquer aux élèves qu'on n'écrit pas ces nombres parce qu'ils sont faciles à trouver.

Consigne : Vous allez maintenant chercher tous les rectangles possibles qui auraient 16, 17, 18, 19 ou 20 cases. Attention, pour certains nombres, ce n'est pas possible sauf si on fait un côté à 1 carreau. Nous n'allons pas faire de côtés à un carreau

Cette situation va permettre de réutiliser le rapport entre addition répétée et multiplication dans une situation de recherche.

De plus, cela permet de continuer le répertoire multiplicatif qui sera une première étape pour apprendre les tables de multiplication.

ACTIVITE 13 : VERS LA TECHNIQUE OPERATOIRE DE LA MULTIPLICATION

3ème et 4ème AF

Cette séquence va permettre d'installer la technique opératoire de la multiplication. Il est nécessaire que les élèves aient déjà compris le sens de la multiplication : remplacer une addition répétée. (années 1-2)

Pour ne pas perdre le sens de la multiplication, on continuera toujours à travailler en même temps des situations –problèmes de multiplication (voir la séance sur les situations-problèmes).

- ♦ Pour les élèves de 3-4 AF, on travaillera la technique avec un multiplicateur à 1 chiffre.
- ♦ Pour les élèves de 4ème AF seulement, on travaillera aussi la technique avec un multiplicateur à 2 chiffres.

Objectif : Automatiser le recours aux tables de multiplication

Matériel : Table de Pythagore affichée dans la classe, graines pour compter les points

Pour chaque élève : cahier, crayon à papier, crayon à bille, gomme

SEANCE 1 : Travail sur le répertoire multiplicatif et tables de multiplication

SEANCE 2 : Résoudre des problèmes du type 15×3 à partir des rectangles.

SEANCE 3 : Problèmes du type $40 \times$

La table de Pythagore est constituée de toutes les tables de multiplication l'une en dessous de l'autre ou l'une à côté de l'autre.

C'est aussi un tableau à double entrée qui permet de trouver un produit en croisant les lignes et les colonnes

SEANCE 1 :

ETAPE 1 : Fabrication d'une table de Pythagore sur le cahier de leçons de mathématiques.

Chaque élève trace un quadrillage de 100 cases (10×10) en s'aidant des carreaux du cahier. L'enseignant trace aussi un quadrillage au tableau et le remplit en même temps que ses élèves.

Consigne : Sur la première ligne, nous allons écrire les 10 premiers nombres entiers : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Il écrit.

Nous allons faire pareil avec la première colonne, le 1 est déjà écrit.

La 1ère ligne, c'est la table de 1, nous comptons de 1 en 1.

La 2ème ligne, ce sera la table de 2. A chaque case, on ajoute 2. Nous allons compter de 2 en

2: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20. Le professeur fait compter les élèves de 2 en 2.

Nous allons faire pareil avec la 2ème colonne : le 2 et le 4 sont déjà écrits.

- ♦ Le professeur demande aux élèves comment construire la table de 3 et les fait compter de 3 en 3. (on ajoute 3 à chaque case).

Puis ils réalisent cette table en colonne.

- ♦ Le professeur fait remplir successivement toutes les tables en ligne et colonne en faisant ajouter à chaque fois le même nombre (table de 4 : on ajoute 4, etc)

Il fait remarquer aux élèves que pour chaque table, il y a de moins en moins de nombres à ajouter puisque les premiers multiples sont déjà remplis.

- ♦ Il vérifie que les élèves ont correctement rempli la table. Il laisse affiché un exemplaire lisible (assez grand) de la table de Pythagore. (la 1ère ligne et la 1ère colonne peuvent être coloriées pour faciliter le repérage.

- ♦ Il montre aux élèves comment trouver un produit (en croisant les lignes et les colonnes.)

- Nous allons chercher combien fait 5 multiplié par 3. Je repère la 5ème colonne. Je repère la 3ème ligne . Je trouve la case qui est sur la 5ème colonne et la 3ème ligne. Qu'y a – t – il écrit ? Je peux aussi chercher la case qui est sur la 5ème ligne et la 3ème colonne. C'est pareil.

ETAPE 2 : Jeu de la table de Pythagore (mémorisation des résultats)

Par groupe de 4, les élèves réalisent un quadrillage de 10 x 10 non écrit et un quadrillage complet (écrit). Le quadrillage vide servira de plateau de jeu, le quadrillage complet sera découpé pour servir de cartes. On laisse ensemble la 1ère ligne et la 1ère colonne qu'on posera directement sur le plateau.

Il est possible de réaliser ce jeu en carton (il sera plus solide). Sinon, les élèves le réalisent avec des feuilles de cahier mais il sera nécessaire de le remplacer plus souvent.

Chaque groupe dispose d'une réserve de cailloux ou de graines pour marquer les points.

Les élèves sont autour du plateau. Il y a 81 cartes. Chaque élève a son tour tire une carte et doit décider où la poser sur le plateau pour qu'elle soit à sa place. Par exemple, l'élève tire la carte 20. Il ne regarde pas le modèle de la table de Pythagore. Il la pose à une place qu'il pense exacte en expliquant pourquoi. Il dit : $20 = 5 \times 4$. Les autres élèves vérifient que c'est vrai et que cette place est exacte. S'ils ne sont pas d'accord entre eux, ils peuvent regarder la table de Pythagore pour vérifier.

Si la place est juste, la carte reste à sa place et l'élève prend une graine.

Si l'élève se trompe, par exemple s'il dit $20 = 6 \times 3$, la place n'est pas juste, la carte est remise en dessous du paquet et l'élève ne prend pas de graine. Puis c'est un autre élève qui prend une carte.

Quand toutes les cartes ont été posées, on compte les graines pour savoir qui a gagné.

Stratégies : *Les élèves connaissent généralement les produits les plus petits (table de 2 et 3). Le coin en haut et à gauche de la table sera rempli en premier, celui en bas et à droite en dernier.*

Lorsque les élèves vérifient sur la table de Pythagore, ils vont apprendre le produit sur lequel ils se sont trompés. On remet la carte en-dessous mais ils s'en rappelleront lorsqu'elle ressortira.

Les élèves repèrent (et on peut leur faire remarquer) que la table est symétrique par rapport à la diagonale. Chaque nombre a toujours au moins deux places possibles ($4 \times 5 = 5 \times 4$) sauf

quand le nombre est multiplié par lui-même (5×5 , 6×6 , etc).

Certains nombres ont plus de deux places possibles : $20 = 2 \times 10 = 10 \times 2 = 4 \times 5 = 5 \times 4$

Si les places 5×4 et 4×5 sont déjà prises, l'élève doit proposer une autre multiplication : 2×10 ou 10×20 .

SEANCE 2

ETAPE 1 : Multiplier par 10

Travail collectif : L'enseignant interroge les élèves sur des résultats de la table de Pythagore : 6×7 , 8×4 , etc.

- ♦ Il demande 5×10 , 7×10 ? Il interroge les élèves sur ce qu'ils remarquent. Les élèves répondent qu'il y a toujours un 0.

- ♦ L'enseignant explique en écrivant : $20 = 2 \times 10$; Il demande à un élève de le montrer sur la table de Pythagore. Il fait remarquer que tous les nombres multipliés par 10 ont un zéro aux unités. Il dit : 20, c'est 2 dizaines et 0 unité, c'est pour cela qu'il y a un 0.

- *Pouvez-vous calculer 34×10 ?* Il laisse les élèves chercher et donner leur avis.

Il conclut : *34×10 , c'est 34 fois 1 dizaine, on l'écrit 340.*

- ♦ Il interroge quelques élèves sur des multiplications par 10 : 25×10 , 10×56 , etc. Il donne la réponse suivant le modèle précédent.

Durée : 15 min

Ce travail sera poursuivi en calcul mental.

ETAPE 2 : Multiplier un nombre entier de dizaines : 30, 40, etc

- ♦ L'enseignant demande : *Comment allons-nous faire pour multiplier 30 par 8 ?* Il laisse les élèves chercher 5 minutes par groupe de 2 et écoute les propositions. Certains peuvent proposer l'addition répétée. D'autres peuvent se servir de la multiplication des dizaines.

L'enseignant conclut : - *30, c'est 3 dizaines. Nous allons multiplier 3 dizaines par 8. Cela fait 24 dizaines, c'est-à-dire 240.*

Il interroge quelques élèves sur des multiplications de 30, 40, etc. Il donne la réponse suivant le modèle précédent.

50×5 , 70×3 , 60×8 , etc

Durée : 15 mn

SEANCE 3 : Multiplication d'un nombre à 2 chiffres par un multiplicateur à 1 chiffre

Les élèves sont par groupe de 4. L'enseignant pose un problème : Pour reboiser un terrain, on plante 4 rangées d'arbres. Chaque rangée a 30 arbres. Combien d'arbres a-t-on plantés ?

- ♦ Les élèves effectuent le problème. Ils vont utiliser probablement l'addition qu'ils connaissent bien. Certains peuvent essayer une multiplication puisqu'ils ont appris à multiplier les dizaines.

- ♦ L'enseignant relève les résultats obtenus avec les 2 procédures (addition et multiplication). Il fait constater que les résultats sont les mêmes. Il demande aux élèves quelle est la procédure

la plus rapide. C'est la multiplication (procédure experte).

- ♦ L'enseignant demande alors combien d'arbres on obtient si on a 5 rangées de 80 arbres, 7 rangées de 40 arbres, etc. Les élèves répondent.
- ♦ L'enseignant demande alors : Avec 4 rangées de 30 arbres, on obtient 120 arbres. Et avec 4 rangées de 32 arbres ?
- ♦ Les élèves cherchent par groupes de 4. Ils savent que le nombre obtenu sera plus grand que 120. Ils voient que l'on a ajouté 2 arbres par rangée, c'est-à-dire 8 arbres.

Synthèse : Les élèves proposent leurs solutions; L'enseignant conclut : 32, c'est $30 + 2$

On sait que $30 \times 4 = 120$. On ajoute $2 \times 4 = 8$. Le total est 128

Il écrit au tableau :

$$\begin{array}{r} 30 \\ \times 4 \\ \hline 120 \end{array} + \begin{array}{r} 2 \\ \times 4 \\ \hline 8 \end{array} = 128$$

Systématisation:

L'enseignant propose plusieurs multiplications d'un nombre de 2 chiffres par un nombre à un chiffre.

Les élèves décomposent le nombre à 2 chiffres en dizaines et unités. Ils le placent dans un tableau et calculent chaque produit séparément puis ils les additionnent.

48 x 7

$$\begin{array}{r} 40 \\ \times 7 \\ \hline 280 \end{array} + \begin{array}{r} 8 \\ \times 7 \\ \hline 56 \end{array} = 336$$

Si des élèves ont des difficultés à comprendre ce calcul, on peut leur donner le matériel de numération : ils ont 7 paquets de 4 dizaines et 8 unités. Ils groupent les dizaines ensemble : ils obtiennent 28 dizaines, ils groupent les unités ensemble, ils obtiennent 56 unités. Ils échangent les groupes de 10 unités contre des dizaines pour obtenir 336 : 33 dizaines et 6 unités.

SEANCE 4 et suivantes : Quand les élèves réussissent bien avec le tableau, on peut leur apprendre à calculer avec une seule ligne.

Difficulté : Pour effectuer 48×7 , on effectue d'abord 8×7 et on a une retenue de 5 dizaines. Si on écrit cette retenue en dessus du 4, les élèves peuvent confondre avec la retenue de l'addition. Il vaut mieux la faire écrire sur le côté et la faire barrer quand elle a été utilisée.

$8 \times 7 = 56$ unités, j'écris 6 unités et je retiens 5 dizaines. 4 dizaines x 7 = 28 dizaines.

28 dizaines + 5 dizaines = 33 dizaines.

SEANCES SUIVANTES (4 AF) : Multiplicateur à 2 chiffres

On reprend la trame de la séance 3 mais on va multiplier 2 nombres à 2 chiffres.

Problème : Combien d'arbres avec 23 rangées de 35 arbres ?

On décompose chaque nombre en dizaines et unités:

$$23 = 20 + 3$$

$$35 = 30 + 5$$

$$\begin{array}{rclcl} & 20 & & 3 & \\ 30 & 600 & + & 90 & = 690 \\ 5 & 100 & + & 15 & = 115 \end{array} \quad 690 + 115 = 805$$

Quand les élèves ont bien compris, on revient à la multiplication posée en détaillant la multiplication par 5 et la multiplication par 30

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 35 \\ \hline 115 \\ \underline{690} \\ 805 \end{array}$$

D – DES NOUVEAUX NOMBRES : FRACTIONS ET NOMBRES DECIMAUX

Objectifs :

Comprendre que les fractions et les nombres décimaux servent à repérer des quantités ou des mesures entre les entiers. Savoir mettre en place des situations permettant d'introduire les fractions. Savoir mettre en place des situations permettant d'introduire les nombres décimaux comme une nouvelle écriture des fractions décimales. Connaître les obstacles liés à la construction des notions de fractions et de décimaux et savoir mettre en place les situations permettant de franchir ces obstacles.

1- Mise en situation des étudiants-maîtres

Par groupes, les étudiants-maîtres reçoivent une grande bande de papier (supérieure à 1m50 et constituée par collage).

Le formateur leur demande de placer à l'extrémité gauche la graduation 0 et à l'extrémité droite la graduation 2. Puis les étudiants doivent trouver des solutions pour placer les graduations $17/12$, $5/8$, $1,25$, $0,95$

2- Structuration

Généralement, le placement des fractions s'obtient par **pliage**. Le pliage en 2 permet de placer la graduation 1. Cette longueur est pliée en 4 ce qui peut permettre si besoin de placer les quarts et les demis. Un nouveau pliage en 2 permettra d'obtenir les huitièmes. (graduation $5/8$). Pour obtenir les douzièmes, il faut revenir aux quarts et replier en 3.(placement de la graduation $17/12$).

NB : Après avoir effectué le pliage, il suffit de compter le nombre de graduations (huitièmes ou douzièmes) à partir du 0 pour placer la graduation.

Autre procédure : Pour placer $17/12$, on peut repérer que c'est égal à $1 + 5/12$. Cette procédure est intéressante car elle se sert de l'encadrement d'une fraction par deux entiers.

- ♦ Pour placer le nombre $1,25$, il faut repérer qu'il s'agit de $1 + 250/1000$ soit $5/4$. Il est facile de le placer en utilisant les graduations en quarts déjà trouvées.
- ♦ Pour placer le nombre $0,95$, il est nécessaire de partager l'unité en 10 morceaux de façon à obtenir des dixièmes. On peut repérer ainsi $9/10$ qui est égal au nombre décimal $0,9$. Le nombre $0,95$ est égal à $0,9 + 5/100$. Il est difficile de partager l'unité en centièmes mais on peut remarquer que $0,95$ est situé sur la droite numérique entre $0,95$ et 1 .
- ✧ Cette activité (qui sera menée en classe à partir de la 5ème AF) permet de mettre en évidence ce que sont les fractions et les décimaux. **Une fraction** s'obtient par partage de l'unité mais elle peut être supérieure à l'unité. On utilise une bande graduée de 0 à 2 pour ne pas fixer l'idée fausse qu'une fraction serait toujours inférieure à l'unité.
- ✧ La situation de pliage permet de montrer **le rapport des fractions entre elles**. Les huitièmes sont la moitié des quarts. Les douzièmes sont le tiers des quarts. On peut constater sur les graduations ainsi créées que $1/4 = 2/8$, $3/4 = 9/12$, etc.
- ✧ Certaines de ces fractions peuvent s'écrire sous forme de **nombres décimaux** : ce sont les fractions décimales. **Les fractions décimales** ont pour dénominateur 10, 100, 1000, 10000, etc. Certaines fractions peuvent se présenter avec un autre dénominateur comme $1/4$, $1/2$, $3/4$, $5/8$, etc. $1/4 = 25/100 = 0,25$

$$\frac{1}{2} = 5/10 = 0,5$$

$$\frac{3}{4} = 75/100 = 0,75$$

$$\frac{5}{8} = 625/1000 = 0,625$$

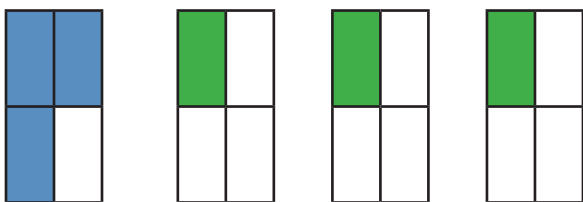
- ✧ Cette activité de placement de fractions permet de renforcer l'idée qu'une fraction est un nombre puisque on peut la placer sur une droite graduée en même temps que des entiers.

LES FRACTIONS

A l'Ecole fondamentale, la fraction est introduite dès la 1ère AF avec l'identification de la moitié ou du quart d'un objet. L'étude des fractions numériques débute en 5ème AF.

3- Apports

A l'école fondamentale, on considère d'abord l'écriture fractionnaire comme un partage de l'unité en quantités égales. Par exemple, on considère que pour obtenir $\frac{3}{4}$, il faut partager l'unité en 4 et conserver 3 des 4 morceaux obtenus.



Mais, $\frac{3}{4}$, c'est aussi la division de 3 par 4. 3 unités divisées par 4

Fractions décimales :

Certaines fractions sont en dixièmes, centièmes, millièmes. Ce sont des fractions décimales, c'est à dire que le dénominateur est une division par 10, 100, 1000, 10000, etc de l'unité.

Toutes les fractions peuvent être décomposées en **partie entière et partie décimale** :

Au XVIème siècle, on a simplifié l'écriture des fractions décimales en plaçant la partie plus petite que l'unité d'une fraction décimale à droite de la virgule : 5,207.

On obtient ainsi un système qui garde les principes de la numération de position : 10 dixièmes, forment une unité, dix centièmes forment un dixième, 10 millièmes forment un centième.

On peut décomposer une fraction décimale ou un nombre décimal de plusieurs façons.

- ♦ Fraction décimale : $\frac{5207}{1000}$
- ♦ Décomposition en somme de fractions décimales : $5 + \frac{2}{10} + \frac{7}{1000}$
- ♦ Somme d'un entier et d'une fraction décimale : $5 + \frac{207}{1000}$
- ♦ Somme d'un entier et d'un décimal : $5 + 0,207$
- ♦ Somme d'un nombre entier et de décimaux : $5 + 0,2 + 0,007$

Fractions équivalentes (5ème et 6ème AF)

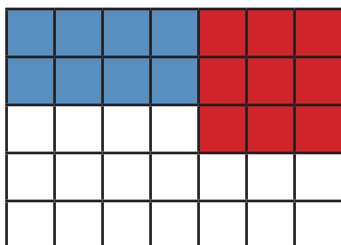
Deux fractions sont dites équivalentes lorsqu'on peut passer de l'une à l'autre soit en multipliant le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul soit en les divisant par un même nombre non nul.

On peut donc conclure que la valeur d'une fraction ne change pas en multipliant ou en divisant chacune de ses parties par un même nombre différent de zéro.

Factorisation d'une fraction

Le procédé qui consiste à diviser le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un même nombre différent de zéro est appelé factorisation. (le mot n'est pas au programme). Exemple : $12/9 = 4/3$

Addition et soustraction de fractions : 5ème AF

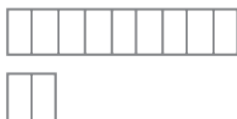
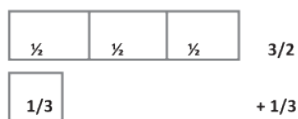


- ♦ Additionner deux fractions c'est ajouter des parties d'un tout. Les carreaux coloriés en bleu peuvent être représentés par la fraction $8/35$ et ceux qui sont coloriés en rouge peuvent être représentés par $9/35$. Les carreaux coloriés étant au nombre de $8+9=17$, ils sont susceptibles d'être représentés par la fraction $17/35$. On en déduit que, pour additionner deux fractions ayant le même dénominateur, on additionne les numérateurs et l'on garde le dénominateur. D'où $8/35 + 9/35 = 17/35$.
- ♦ Connaissant le nombre total de carreaux coloriés et le nombre de carreaux coloriés en rouge, quelle opération permettra de trouver le nombre de carreaux coloriés en bleu ? Etant donné qu'il s'agit de déterminer un reste, on doit recourir à une soustraction. Heureusement, pour soustraire deux fractions ayant le même dénominateur, on suit la même démarche que pour l'addition : on fait la différence des numérateurs et l'on garde le dénominateur. Comme $17-9=8$, on a : $17/35 - 9/35 = 8/35$.

Addition et soustraction de fractions n'ayant pas même dénominateur : 6ème AF

Pour les fractions ayant même dénominateur, ça se passe en général assez bien. Cependant les enfants ont souvent tendance à considérer les fractions comme étant deux nombres superposés qui évoluent chacun dans son propre monde. Ils ont donc tendance à additionner les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Qu'est ce qui se passe lorsque les fractions ont des dénominateurs différents ?



Consigne : Effectuer : $3/2 + 1/3$

Ici, les deux fractions sont de dénominateurs différents, on ne peut pas aller droit au but comme on vient de le faire dans le cas

précédent. Il faut d'abord penser à les mettre au même dénominateur. On choisit de tout écrire en sixièmes. On travaille avec des bandes de papier.

Chaque demi a été partagé en 3 : on a 3 fois plus de sixièmes. Le tiers a été partagé en 2, on a 2 fois plus de sixièmes.

Puisque les deux fractions à additionner ont maintenant même dénominateur, on additionne les numérateurs sans changer le dénominateur.

On a finalement : $9/6 + 2/6 = 11/6$

Synthèse : Comment a-t-on fait pour transformer les demis et les tiers en sixièmes ?

La mise au même dénominateur peut être faite de la façon suivante : On multiplie les deux termes de la première fraction par le dénominateur de la seconde. On a $3/2 = 9/6$

On multiplie les deux termes de la seconde par le dénominateur de l'autre. On a $1/3 = 2/6$

Ce travail est à faire en lien avec le travail sur les fractions équivalentes. On peut aussi le lier avec l'étude de la proportionnalité.

Remarque : Ce même procédé permet aussi de soustraire des fractions n'ayant pas même dénominateur.

Multiplication de fractions : 6ème AF (En 5ème AF, on apprend seulement à multiplier une fraction par un entier)

En général, apprendre à multiplier deux fractions ne pose pas de grande difficulté aux élèves. Le produit de deux fractions est la nouvelle fraction ayant pour numérateur le produit des numérateurs et pour dénominateur le produit des dénominateurs des deux fractions.

Exemple : Effectuer le produit $7/9 \times 4/11$. On a : $7/9 \times 4/11 = 28/99$ car $7 \times 4 = 28$ et $9 \times 11 = 99$.

Inverse d'une fraction : 6ème AF

L'inverse d'une fraction est la fraction obtenue en permutant les rôles des deux termes de la fraction. L'inverse de a/b est donc la fraction b/a .

Division de fractions : 6ème AF

La division d'une fraction par une fraction est la fraction obtenue en multipliant la première fraction par l'inverse de la seconde.

Exemple : $2/7 \div 3/5 = 2/7 \times 5/3 = 10/21$.

Obstacles et difficultés

- ♦ **Difficulté à concevoir qu'une fraction peut être supérieure à 1**

Il s'agit d'un obstacle épistémologique (lié à la notion). A l'origine, les fractions sont une partie d'une unité divisée en 2, 3, 5, 10, etc. On retrouve cette notion dans les mots qui désignent le dénominateur : cinquième, huitième, neuvième, dixième. Prendre un cinquième, cela veut dire partager cette unité en 5 et prendre la 5ème partie.

Dès l'introduction des fractions, on travaillera avec des fractions inférieures ET supérieures à l'unité. Le placement de fractions sur une droite graduée en entiers, le repérage sur cette droite d'entiers transformés en fractions permet de dépasser cet obstacle.

- ♦ **Les élèves ne remarquent pas que les parties doivent être égales pour parler de fractions.**

L'obstacle ici est didactique. On présente généralement, presque uniquement des schémas avec des entiers partagés en parts égales et on demande aux élèves de retrouver la fraction correspondante. Ils comptent les parties colorées et déduisent le numérateur, ils comptent le total des parties et déduisent le dénominateur.



Proposer aussi des schémas où le partage n'est pas équitable et demander quelle est la fraction correspondante. Ce schéma permet de mettre en échec la représentation fausse décrite.

Quelle fraction représente la partie colorée ? $2/5$, $3/5$, $1/2$?

4- Activités de classe

ACTIVITE 14 : LA BANDE DE PAPIER

Matériel : Bande de papier

Consigne : Considérer une bande de papier, plier cette bande en deux parties égales, faire un nouveau pli en deux parties égales, répéter une fois de plus la même expérience. Déplier la bande de papier. En combien de parties la bande de papier est-elle divisée ? Que peut-on dire de chacune de ces parties par rapport à la bande toute entière ?

Définition : Une fraction est une ou plusieurs parties d'un tout.

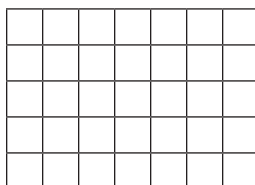
- ♦ L'écriture d'une fraction comporte deux parties : le numérateur et le dénominateur.
- ♦ Le numérateur et le dénominateur sont séparés par une barre appelée « barre de fraction ».

Dans l'activité précédente, la bande de papier est divisée en 8 parties égales. Chacune de ces parties représente un huitième du tout, ce que l'on écrit : cette fraction a pour numérateur 1 et pour dénominateur 8. En considérant un nombre donné n des ces 8 parties, on écrit alors $n/8$.

ACTIVITE 15 : ECRIRE DES FRACTIONS

Savoir écrire une fraction correspondant à une surface donnée et en dégager le sens de l'addition des fractions.

Consigne : Reproduire le quadrillage suivant et colorier en bleu 8 de ses carreaux puis en rouge 9 autres.



- ♦ Ecrire une fraction représentant les carreaux coloriés en bleu par rapport au nombre total des carreaux.
- ♦ Ecrire une fraction représentant les carreaux coloriés en rouge par rapport au nombre total

des carreaux.

- ♦ Ecrire une fraction représentant tous les carreaux coloriés par rapport au nombre total des carreaux.
- ♦ Que représente cette dernière fraction par rapport aux deux précédentes ?
- ♦ En déduire un procédé permettant de déterminer la somme de deux fractions ayant même dénominateur.

ACTIVITE 16 : LES BANDES DE COULEUR

Les élèves disposent de 3 bandes de papier. La bande rouge représente la bande-unité. Ils doivent donner les longueurs de la bande jaune et de la bande bleue en fonction de la bande rouge.



Additionner des fractions

Consigne : J'ai deux gâteaux et le $\frac{1}{5}$ d'un troisième. Combien ai-je de gâteaux en tout ?

Tout le problème consiste à calculer la somme : $2 + \frac{1}{5}$

Certainement, les élèves diront qu'ils savent calculer la somme de deux fractions mais ils ne savent pas comment procéder dans ce cas apparemment compliqué. Pourtant, il n'en est rien. Il suffit de se rappeler que les nombres entiers sont des fractions particulières qui ont 1 pour dénominateur. Du coup, on peut appliquer la méthode connue pour calculer la somme $\frac{2}{1} + \frac{1}{5} = \frac{10}{5} + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}$.

Donner la fraction d'un nombre

Consigne : Le papa de Ricardo et de Raymonde leur donne un billet de 250 G à partager à condition que Raymonde en ait les $\frac{3}{5}$. Trouver la part de chacun.

5 - Activité d'évaluation et de réinvestissement

Demander aux étudiants-maîtres à quelles erreurs éventuelles peuvent-ils s'attendre de la part de leurs élèves en leur demandant d'additionner des fractions qui n'ont pas le même dénominateur. Leur demander d'interpréter ces erreurs et de trouver une activité de remédiation possible.

LES DECIMAUX

L'étude des décimaux débute en 5ème AF en partant de l'étude des fractions décimales.

3 - Apports

- ♦ Nous avons vu que les nombres décimaux sont en fait des fractions décimales.
Le numérateur est un multiple de 10.

- ♦ Pour une fraction inférieure à 1, par exemple $3/10$
 $3/10 = 30/100 = 300/1000 = 3000/10000 = 0,3$
- ♦ Les nombres entiers sont aussi des fractions décimales : $8 = 80/10 = 800/100$
Si on gradue une bande de papier en dixièmes, on verra que la graduation 8 est aussi 80/10.
- ♦ L'écriture décimale classique reprend les principes de la numération de position.

Dans le nombre 15,24 : le chiffre 1 vaut 10
le chiffre 5 vaut 5
le chiffre 2 vaut 2/10
le chiffre 4 vaut 4/100

$$15,24 = 10 + 5 + 2/10 + 4/100$$

ACTIVITE 17 : CALCULER LA MESURE DE LA MOITIÉ D'UN SEGMENT

Trouver la mesure de la moitié d'un segment quand on connaît la mesure totale

Matériels : Bandes de papier prédécoupées de 9, 11, 13, 15, 17, et 19 cm (suivant l'effectif de la classe).

- ♦ Rassembler les élèves par groupes de trois ou quatre et donner une bande de papier par groupe.
- ♦ Demander à chaque groupe :
De mesurer avec la règle la longueur de la bande puis de noter cette mesure sur une fiche.
De trouver sans mesurer (par pliage) le milieu de la bande.
De mesurer alors la longueur de la moitié de la bande et de noter cette nouvelle mesure sur la fiche.
- ♦ Lors de la mise en commun, revenir sur la façon de noter la moitié d'une bande. Par exemple, la moitié de 9 cm mesure 4cm et 5mm ce que l'on peut aussi noter 4,5cm.

Le nombre 4,5 est dit décimal. Sa partie entière est 4 et sa partie décimale est 5.

Ce nombre admet aussi les **écritures fractionnaires** suivantes :

$$4,5 = 45/10 = 40/10 + 5/10 = 4 + 5/10.$$

D'où la lecture : quatre entiers et 5 dixièmes.

Tout nombre qui s'écrit sous forme de fraction décimale est **un nombre décimal**.

Les nombres décimaux sont donc des **nombres fractionnaires particuliers**.

4) Obstacles et difficultés

La construction de la notion de nombre décimal est souvent difficile pour l'élève car elle lui demande de déconstruire une partie des notions qu'il avait établies pour les nombres entiers.

- ♦ Les nombres entiers permettent de dénombrer des quantités d'objets.
Les nombres décimaux permettent de travailler sur des nombres qui ne représentent pas des quantités d'objets.

- ♦ Plus un nombre entier a de chiffres, plus il est grand.
La supériorité ou l'infériorité d'un nombre décimal ne dépend pas de son nombre de chiffres.
- ♦ Pour multiplier un entier par 10, j'ajoute un zéro à droite.
Si j'ajoute un zéro à droite de la partie décimale d'un nombre décimal, le nombre ne change pas.

ACTIVITE 18 : INTERCALER DES NOMBRES DECIMAUX

Intercaler des nombres décimaux entre des nombres entiers avec le support de la droite graduée puis des nombres décimaux entre d'autres nombres décimaux permet de comprendre le fonctionnement de cette partie décimale ;

- ♦ graduer en dixièmes une droite graduée de 7 à 9
- ♦ placer 7,4

demander aux élèves : où va-t-on placer 7,39 ? Est-ce avant ou après 7,4 ? Certains élèves répondront que 7,39 est après 7,4 car 39 est plus grand que 4. On peut faire échanger les élèves et revenir à l'écriture fractionnaire : $7,39 = 7 + 3/10 + 9/100$ tandis que $7,4 = 7 + 4/10$

- ♦ on fera graduer en centièmes un segment compris entre 7,3 et 7,4 pour affermir la réponse précédente.

NB : Ce travail de placement de nombres sur des droites graduées en entiers, en dixièmes, en centièmes, etc permet de construire cette intercalation de nombres décimaux comme infinie. On répétera ce travail plusieurs fois en jouant sur les variables utilisées.

Techniques opératoires

Addition de nombres décimaux : 5ème et 6ème AF

Consigne : Effectuer : $543,81 + 72,23 + 15,27$

Remarque : En posant cette opération, il faut s'assurer d'avoir placé les virgules les unes en dessous des autres. On commence à effectuer de la droite vers la gauche et la virgule doit conserver sa colonne dans le résultat.

Mise en œuvre : Posons l'opération :

$$\begin{array}{r}
 543,81 \\
 + 72,23 \\
 + 15,27 \\
 \hline
 631,31
 \end{array}$$

D'où le résultat : $543,81 + 72,23 + 15,27 = 632,11$

Soustraction de nombres décimaux : 5ème et 6ème AF

Mise en situation des étudiants-maîtres.

Le formateur propose deux fractions décimales à ses étudiants. Il leur demande de soustraire la plus petite de la plus grande. Il leur demande ensuite de donner l'écriture décimale de chacune des trois fractions (les fractions initiales et le résultat de la soustraction). Il leur demande d'en faire un commentaire.

Après confrontation des commentaires, le formateur fait le point sur la soustraction des nombres décimaux. La soustraction des nombres décimaux se fait de la même façon que l'addition. On superpose les virgules et l'on opère de la droite vers la gauche. La virgule doit être placée sous les autres (même colonne).

Consigne : *Lundi dernier Jean se rendait à l'école avec 50,75 G en poche. Pendant la récréation, il achète un bonbon et un cola 7UP pour 27,50 G. Combien lui reste-t-il en poche?*

Mise en œuvre

Pour répondre à cette question, il faut effectuer l'opération : $50,75 \text{ G} - 27,50 \text{ G} = ? \text{ G}$

Posons l'opération :

$$\begin{array}{r} 50,75 \\ - 27,50 \\ \hline 23,25 \end{array}$$

Comme on ne peut pas soustraire 7 de 0, on a emprunté une dizaine des cinq dizaines. On a ainsi à effectuer : $10 - 7$ d'une part et $4 - 2$ d'autre part. Il lui reste en poche : 23,25 G.

Multiplication des nombres décimaux : 6ème AF

En 5ème AF, on apprend seulement la multiplication d'un décimal par un entier.

Mise en situation

Pour mettre les étudiants-maîtres en situation, le formateur propose deux fractions décimales. Il leur demande de les multiplier, de donner leurs écritures décimales et de commenter le résultat. Après les commentaires, le formateur fait le point.

Pour multiplier deux nombres décimaux, on effectue l'opération sans tenir compte des virgules. La multiplication terminée, on place la virgule au résultat de façon à avoir autant de chiffres après la virgule qu'il y en avait en tout dans les deux nombres.

Exemple : Effectuer $356,35 \times 48,7$.

On pose l'opération :

$$\begin{array}{r} 356,35 \\ \times 48,7 \\ \hline 24944,5 \quad (35635 \times 7 = 249445) \\ + 2850800 \quad (35635 \times 80 = 2850800) \\ + 14254000 \quad (35635 \times 400 = 14254000) \\ \hline 17354,245 \end{array}$$

On laisse trois chiffres après la virgule car il y a en tout trois chiffres après la virgule dans les deux nombres à multiplier.

Division d'un nombre décimal par un nombre décimal : 6ème AF

Le formateur peut très facilement adapter l'activité de mise en situation précédente pour mettre les étudiants-maîtres en situation dans le cas de la division.

Dans la division des décimaux, trois cas peuvent se présenter :

1. Le dividende est décimal et le diviseur est entier.

2. Le dividende est entier et le diviseur est décimal.
3. Le dividende et le diviseur sont décimaux.

Premier cas :

Consigne : Effectuer la division suivante : $6894,56 \div 32$.

Pour effectuer cette division, on peut commencer sans tenir compte de la virgule. On place la virgule au quotient dès que la division dépasse la virgule au dividende. (on commence à diviser la partie décimale)

Deuxième cas

$$\begin{array}{r}
 6894,56 \quad | \quad 32 \\
 - 64 \\
 \hline
 049 \\
 - 32 \\
 \hline
 174 \\
 - 160 \\
 \hline
 0145 \\
 - 128 \\
 \hline
 0176 \\
 - 160 \\
 \hline
 016
 \end{array}$$

Consigne : Effectuer $784 \div 13,36$. Le diviseur comporte deux chiffres après la virgule, on le rend entier en multipliant les deux nombres par 100. La division à effectuer est donc équivalente à la suivante :

$$\begin{array}{r}
 78400 \quad | \quad 1336 \\
 - 6680 \\
 \hline
 11600 \\
 - 10688 \\
 \hline
 00912
 \end{array}$$

Noter que cette division aurait pu être prolongée.

Troisième cas

Consigne : Effectuer la division suivante : $569,42 \div 15,75$. Pour effectuer cette opération, étant donné que le diviseur contient deux chiffres après la virgule, on multiplie les deux nombres par 100. L'opération à effectuer est donc équivalente à la suivante :

$$\begin{array}{r}
 56942 \quad | \quad 1575 \\
 - 4725 \\
 \hline
 09692 \\
 - 9450 \\
 \hline
 0242
 \end{array}$$

Continuation d'une division :

Activité

Soit à partager 673 équitablement entre quatre personnes. Quelle sera la part de chacun ?

Certainement, pour répondre à cette question on peut, soit effectuer une division, soit procéder par soustractions itérées. De toute façon, après avoir déterminé le quotient entier, il en reste une gourde qu'il faut aussi partager. Pour connaître la part exacte de chacun, il faut donc continuer la division.

$$\begin{array}{r}
 673 \\
 - 4 \\
 \hline
 27 \\
 - 24 \\
 \hline
 033 \\
 - 32 \\
 \hline
 010 \\
 - 8 \\
 \hline
 020 \\
 - 20 \\
 \hline
 00
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 4 \\
 \hline
 168,25
 \end{array}$$

Je dis en 6 combien y-a-t-il de fois 4 ? Ça va pour une fois, $1 \times 4 = 4$, $6 - 4 = 2$. J'abaisse le chiffre suivant qui est 7. Je dis en 27 combien y a-t-il de fois 4 ? Ça va pour 6 fois, $6 \times 4 = 24$; $27 - 24 = 3$. J'abaisse le chiffre suivant qui est 3, je dis en 33 combien y a-t-il de fois 4 ? Ça va pour 8 fois, $8 \times 4 = 32$; $33 - 32 = 1$.

Pour pouvoir partager le reste, je place une virgule au quotient et 0 à droite du reste. Je dis en 10 combien y a-t-il de fois 4 ? Ça va pour 2 fois, $2 \times 4 = 8$, $10 - 8 = 2$. Je peux encore continuer la division en plaçant 0 à droite du reste (2). Je dis en 20 combien y a-t-il de fois 4 ? Ça va pour 5 fois, $5 \times 4 = 20$; $20 - 20 = 0$. On ne peut plus continuer. Chacun doit recevoir 168,25 G.

4 - Activités de classe

Ecriture décimale et écriture fractionnaire

Consigne : Observer et continuer :

Un et cinq centièmes = $1 + 5/100 = 1,05$.

Vingt et trois dixièmes = ...

Quatre et vingt millièmes = ...

Trente-huit centièmes = ...

5 - Activité de réinvestissement - Evaluation

Consigne : *Les étudiants-maîtres sont rassemblés par groupes.*

- Préparer des cartes. Sur chacune d'elles figure un nombre décimal. Demander à un élève de venir tirer une carte et de l'afficher au tableau. Faire lire le nombre. Demander d'écrire sur son ardoise ou sur une feuille de papier une autre écriture du même nombre. Faire tirer une nouvelle carte et recommencer le même processus.

Exemple :

Préparer des cartes avec sur chacune d'elles, un nombre décimal. Ces nombres peuvent être écrits de différentes façons. Comment utiliser ce matériel en salle de classe de façon à ce que les élèves soient en activité et consolident leur connaissance des différentes manières d'écrire un nombre décimal.

- Elaborer d'autres activités portant sur les différentes manières d'écrire un même nombre décimal.

E – LE CALCUL MENTAL

Objectifs de formation :

Comprendre ce qu'est le calcul mental. Comprendre la différence entre le calcul automatisé et le calcul réfléchi. Savoir à quoi sert le calcul mental dans l'apprentissage. Savoir aider les élèves à mémoriser les tables et les résultats importants. Comprendre la différence entre les moments d'apprentissage de procédures, les moments d'entraînements et les moments de consolidation. Mettre en place des séances de calcul mental

1 – Mise en situation des étudiants-maîtres

Situation 1 : Calculez sans poser $37 + 48$. Comment avez-vous procédé ?

Situation 2 : Multiplier par 11: $11 \times 26 = ?$

Combien avez- vous trouvé ? Comment avez-vous procédé ?

Situation 3 : Multiplier par 5 : $64 \times 5 = ?$ Combien avez- vous trouvé ? Comment avez-vous procédé ?

Situation 4 : Complément à 100 : $54 \rightarrow 100$. Combien avez-vous trouvé ? Comment avez-vous procédé ?

2 – Structuration par le formateur

Situation 1 :

- ♦ Vous avez calculé les dizaines puis les unités :
$$\begin{array}{r} 30 + 40 = 70 \\ 7 + 8 = 15 \\ 70 + 15 = 85 \end{array}$$
- ♦ Vous avez repéré que 48, c'est $50 - 2$:
$$\begin{array}{r} 37 + 50 = 87 \\ 87 - 2 = 85 \end{array}$$
- ♦ Vous cherchez à compléter 37 pour atteindre 40 : $37 + 48 = 37 + (3+45) = (37+3) + 45 = 85$
- ♦ Vous avez calculé sur le modèle du calcul posé en calculant d'abord les unités puis les dizaines.
$$\begin{array}{r} 7 + 8 = 15 \\ 30 + 40 = 70 \\ 70 + 15 = 85 \end{array}$$

Pour chaque calcul, il y a plusieurs procédures possibles.

Situation 2 : Résultat = 286. Comment peut-on faire pour multiplier par 11? On multiplie 26 par 10 , cela fait 260 et on ajoute 26 au résultat.

Situation 3 : Résultat = 320. Comment peut-on faire pour multiplier par 5? On multiplie par 10 ($64 \times 10 = 640$) et on divise par 2 ($640 : 2 = 320$).

Situation 4 : Résultat = 47. Comment peut-on faire pour trouver le complément à 100 ?
 $53 \rightarrow 60 = 7$, $60 \rightarrow 100 = 40$, $40 + 7 = 47$

Dans toutes ces situations, le calcul mental s'appuie sur les propriétés des nombres, les relations des nombres entre eux et les propriétés des opérations.

3 – Apports

Qu'est-ce que le calcul mental ?

C'est un calcul qui n'est pas posé.

Le calcul mental est d'abord la recherche de **procédures** : on parle de **calcul réfléchi**. On fixera ces procédures avec un entraînement régulier : **séances d'entraînement**. Progressivement, certains de ces résultats sont mémorisés. Ils deviendront ainsi toujours disponibles en mémoire : **calcul automatisé**.

Pourquoi faire du calcul réfléchi ? cela permet une connaissance plus approfondie des nombres et une familiarisation avec les **propriétés des opérations**

Pourquoi faire des séances d'entraînement ? L'entraînement va permettre d'accélérer certaines de ces procédures particulièrement efficaces. L'accent est mis sur la compréhension des propriétés des opérations qui vont être mieux comprises et assimilées.

Pourquoi faire du calcul automatisé ? Certains résultats vont être **mémorisés**. Cela permet de les avoir toujours à disposition en mémoire sans avoir besoin de les recalculer.

Quels sont les résultats importants à mémoriser ? : tables d'addition, tables de multiplication, compléments à 10, doubles des nombres jusqu'à 20, multiples de 25 jusqu'à 25 x 4.

Comment mettre en place des séances de calcul mental ?

Pour chaque type de question, les élèves essaient d'abord de calculer le résultat par leurs propres moyens ---> **calcul réfléchi**.

Puis, l'enseignant propose une procédure intéressante en demandant aux élèves de l'appliquer ---> **apprentissage d'une procédure**.

Il organisera des moments d'entraînement en proposant aux élèves les mêmes types de question. Les élèves pourront ainsi entraîner les procédures apprises ---> **entraînement**.

Certains résultats (par exemple les tables) vont commencer à être mémorisés. L'enseignant accélérera cette mémorisation en mettant en place des moments plus rapides où les résultats ne seront pas recalculés mais puisés en mémoire ---> **mémorisation**.

Construction du résultat ---> Entraînement ---> Mémorisation

Attention : Tous les résultats n'ont pas besoin d'être mémorisés.

Déroulement d'une séance de calcul mental

Les séances de calcul mental sont courtes et régulières. Elles gagnent à être **ritualisées**, c'est-à-dire se dérouler chaque jour, à la même heure, de la même façon. Elles se font en deux temps :

- ♦ D'abord un temps de **renforcement des résultats mémorisés** (entre 5 et 10 min). L'enseignant interroge les élèves sur des résultats qu'ils commencent à fixer « par cœur » ou sur des connaissances « par cœur » qu'il veut entretenir. Ce travail est mené rapidement pour que les élèves, progressivement, ne reconstruisent plus le résultat mais le recherchent en mémoire.
- ♦ Puis un temps d'**apprentissage de procédures ou d'entraînement** (entre 10 et 15 min). Toutes les 4 ou 5 séances, l'enseignant organisera un temps d'apprentissage de procédures. Il donnera un calcul et laissera les élèves chercher à leur manière et proposer des procé-

dures. Il attirera l'attention sur une procédure en demandant aux élèves de l'appliquer.

Pendant les 3 ou 4 séances suivantes, les élèves entraîneront la procédure qu'ils ont apprise. Pour chaque calcul, l'enseignant expliquera à nouveau la démarche. Il laissera les élèves qui le souhaitent utiliser une autre procédure. Pendant la séance d'entraînement, l'enseignant fera réactiver aussi une procédure plus ancienne.

Comment faire mémoriser des résultats ?

On retient bien ce qui a du sens. Par exemple, il est beaucoup plus facile de retenir une phrase que des mots isolés.

Pour mémoriser des résultats, il faut les comprendre. On ne demandera pas aux élèves de mémoriser des résultats sans les comprendre. Il sera plus facile de retenir les tables si on comprend comment elles sont constituées. Il faut comprendre que les résultats des tables ne sont pas isolés mais ont des rapports entre eux. Par exemple, les résultats de la table de 4 sont le double des résultats de la table de 2. Ils vont de 4 en 4.

Il faut comprendre que les résultats des tables peuvent se retrouver, se recalculer. Il sera plus facile de retenir les tables si on comprend leur utilité dans la vie quotidienne. Pour mémoriser les tables, il est utile de prendre conscience de ce qu'on sait déjà et de ce qui reste à apprendre.

Enfin, la mémorisation ne peut pas se faire en une seule fois : l'entraînement doit être suffisamment long et surtout régulier.

4 – Quelles difficultés ? Quels obstacles ?

Des obstacles didactiques :

- ♦ liés à la récitation des tables de multiplication ou d'addition en entier : les résultats ne sont pas disponibles en mémoire de travail, l'élève doit réciter la table ou un morceau de table.
Remédiation : Apprentissage des tables comme un processus de questions-réponses avec des questions posées dans tous les sens (par exemple $36 = ?$, réponse $6 \times -$ ou 9×4) et non comme une récitation.
- ♦ liés à l'obligation pour l'élève de reproduire mentalement la technique opératoire posée : calcul des unités puis des dizaines.
En calcul mental, la technique inverse est souvent plus efficace.
- ♦ Des difficultés liées au manque de connaissance des propriétés des opérations, des relations des opérations entre elles (addition et soustraction par exemple).

Certains moments de calcul mental peuvent être menés en petits groupes pendant que les autres élèves s'entraînent à des calculs écrits au tableau ou travaillent à partir de jeux de calcul mental en autonomie. Ces moments en petits groupes permettent que chacun détaille sa procédure, que l'enseignant évalue ainsi le niveau et les difficultés de ses élèves, que les élèves comprennent et se saisissent des procédures de leurs camarades.

- ♦ Manque de confiance, de rapidité et de concentration. L'élève est vite débordé, car il ne sait pas retrouver ses résultats, il n'en est pas sûr, il les confond ou n'est pas efficace dans ses procédures.

Remédiation : Le rythme et la mise en place des séances favorisera la concentration. On commencera par des questions faciles pour rassurer et mettre en confiance. L'enseignant aura une attitude valorisante face aux erreurs en faisant expliquer les procédures pour rechercher leur origine.

Les outils

Le maître choisira l'outil en fonction de l'objectif de l'activité et de la nécessité ou non de garder des traces écrites. Si l'objectif est l'entraînement, il privilégiera l'**ardoise** pour travailler la rapidité. Si l'élève doit mesurer lui-même sa performance, il choisira plutôt de le faire travailler sur le **cahier de brouillon**. Enfin, si le maître veut évaluer et suivre ce que font les élèves, il préférera le **cahier du jour ou celui de mathématiques**.

5) Activités de classe

ACTIVITE 19 : AJOUTER 10 A UN NOMBRE

Le matériel de numération (par exemple petite capsules pour les unités et grosses capsules pour les dizaines) est présent pour la validation.

L'enseignant annonce : *Aujourd'hui, nous allons apprendre à ajouter 10 à un nombre. Vous allez chercher tout seuls puis vous écrirez ce que vous avez trouvé et nous discuterons pour savoir comment vous avez fait.*

$27 + 10 = ?$ Montrez. Comment avez-vous fait ?

Certains élèves vont calculer en « avançant » de 10 à partir de 27. Ce calcul est long et peut aussi être source d'erreurs. Certains élèves peuvent penser à ajouter directement la dizaine parce que 27, c'est 2 dizaines et 7 unités. Sinon, c'est l'enseignant qui expliquera en montrant avec le matériel de numération :

J'ai 2 dizaines et 7 unités, je rajoute 10, c'est une dizaine. Donc je rajoute une dizaine aux 2 dizaines, je ne touche pas aux unités. Finalement, j'ai 3 dizaines et 7 unités.

Effacez. Maintenant $46 + 10 = ?$ L'enseignant fait écrire puis montrer. Il interroge les élèves sur leurs procédures. Les élèves peuvent expliquer à leur manière, par exemple : J'ajoute une dizaine à 4 dizaines. Ça fait 56. A chaque calcul, l'enseignant réexplique la procédure et reformule.

Calculs suivants : $73 + 10$, $62 + 10$

Si les élèves réussissent ces calculs, l'enseignant fait ajouter deux dizaines : $54 + 20$, $78 + 20$.

Il peut ensuite passer à des ajouts de 30, 40, 50, 60 sans que le total dépasse 100.

$59 + 30$, $58 + 40$, $61 + 30$, $22 + 50$, $49 + 20$, $37 + 60$

Durée : 10 à 15 min

Cette procédure devra être renforcée par des séances d'entraînement.

ACTIVITE 20 : MULTIPLIER PAR DES DIZAINES ENTIERES (3ÈME AF)

Le matériel de numération (par exemple petite capsules pour les unités et grosses capsules pour les dizaines) est présent pour la validation.

L'enseignant annonce : *Aujourd'hui, nous allons apprendre à multiplier un nombre par 20, ou 50. Vous allez chercher tout seuls puis vous écrirez ce que vous avez trouvé et nous discuterons pour savoir comment vous avez fait.* $8 \times 20 = ?$ Montrez. Comment avez-vous fait ?

Certains élèves vont essayer d'additionner $20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20$. Ce calcul est long et peut aussi être source d'erreurs. Certains élèves peuvent penser à multiplier directement les dizaines parce que 20, c'est 2 dizaines. De plus, le moment de mémorisation a

« réactivé » les tables de 2 et 5. Sinon, c'est l'enseignant qui expliquera en montrant avec le matériel de numération : *Voilà, c'est 20, c'est 2 dizaines. Si je multiplie par 8, je vais avoir 8 paquets de 2 dizaines, ça fait combien de dizaines ? 16 dizaines, c'est-à-dire 160. Quand on multiplie par 20, 30 ou 40, il n'y a pas d'unité, on multiplie les dizaines et on remet le zéro à la fin pour montrer qu'il n'y a pas d'unité. Effacez. Maintenant $4 \times 20 = ?$*

L'enseignant fait écrire puis montrer. Il interroge les élèves sur leurs procédures. Les élèves peuvent expliquer à leur manière. A chaque calcul, l'enseignant réexplique la procédure et reformule.

Calculs suivants : 3×50 , 2×50 , 3×20 , 6×20 , 7×50 , 7×20 , 9×20 , 4×50 , 5×20

Durée : 10 à 15 min

Cette procédure devra être renforcée par des séances d'entraînement.

ACTIVITE 21: MEMORISATION DES TABLES DE MULTIPLICATION (4ÈME AF)

Mémorisation : Tables de multiplication mélangées

Apprentissage de procédures : Multiplier 2 nombres avec des dizaines ou des centaines entières.

Cette séance n'est qu'un exemple d'une séance de calcul mental en 4ème AF. Suivant la progression des élèves, on choisira d'autres thèmes.

Organisation matérielle :

Il est plus facile de travailler avec des ardoises. L'enseignant pose la question et les élèves écrivent le résultat sur l'ardoise. Au signal, ils lèvent l'ardoise à la hauteur de leur menton. Ainsi, l'enseignant peut voir toutes les réponses très rapidement et se rendre compte du niveau de sa classe. Puis, il dit : « Posez les ardoises et effacez » et il repose une autre question. Ce procédé a l'avantage de plus de donner des séances rythmées et efficaces en peu de temps.

Si les élèves n'ont pas d'ardoise, on les fera écrire sur une feuille ou sur le cahier. L'enseignant interrogera un élève différent à chaque fois.

Mémorisation :

L'enseignant fait sortir les ardoises (ou les cahiers). Il dit : « Aujourd'hui, nous allons travailler les tables de multiplication. Il pose la première question : $8 \times 4 = ?$. Il laisse quelques secondes pour écrire la réponse. « Montrez. » Il regarde les réponses des élèves. « La réponse est 32. » Il procède de la même manière pour les questions suivantes :

$$5 \times 3 = ?$$

$$6 \times 4 = ?$$

$$5 \times 4 = ?$$

$$6 \times 6 = ?$$

$$9 \times 7 = ?$$

$$5 \times 8 = ?$$

$$6 \times 7 = ?$$

$$9 \times 5 = ?$$

$$3 \times 7 = ?$$

$$8 \times 8 = ?$$

L'enseignant pose une dizaine de questions rapidement. Il commence par les questions les plus faciles pour encourager les élèves puis augmente la difficulté.

ACTIVITE 22 : MULTIPLICATION DE DIZAINES OU CENTAINES PAR DES DIZAINES OU CENTAINES

Apprentissage de procédure :

L'enseignant annonce : *Aujourd'hui, nous allons apprendre à multiplier ensemble des dizaines ou des centaines. Vous allez chercher tout seuls puis vous écrirez ce que vous avez trouvé et nous discuterons pour savoir comment vous avez fait. $40 \times 20 = ?$ Montrez. Comment avez-vous fait ?*

Les élèves connaissent déjà la procédure pour multiplier 4×20 , ils peuvent essayer de la réutiliser en confondant les deux situations et répondre 80. Si cela se produit, l'enseignant peut partir de cette réponse pour expliquer :

- Non, 80, c'est 4×20 ou 40×2 mais là, on ne multiplie pas par 2, on multiplie par 20 et 20, c'est 10 fois plus grand, il faut encore multiplier par 10, c'est 80 dizaines, c'est 800.

Autre explication : - 40, c'est 4 dizaines, on a 20 paquets de 4 dizaines, on a 80 dizaines, c'est 800 unités. Effacez. Maintenant « $30 \times 40 = ?$ »

L'enseignant fait écrire puis montrer. Il interroge les élèves sur leurs procédures. Les élèves peuvent expliquer à leur manière : on multiplie 3×4 sans les zéros puis on ajoute le zéro de 30 et le zéro de 40, ça fait 1200.

A chaque calcul, l'enseignant réexplique la procédure et reformule.

Calculs suivants : 70×50 , 60×20 , 30×50 , 700×20 , 900×30 , 400×40 , 500×300

Durée : 10 à 15 min

Cette procédure devra être renforcée par des séances d'entraînement.

6) Activités de réinvestissement – évaluation

En s'aidant du cours et des exemples de séances, construire des séances (mémorisation de résultats et/ou apprentissage de procédures pour la 5ème et 6ème AF) sur les thèmes suivants :

- ♦ addition ou soustraction de décimaux lorsque le résultat est un nombre entier (ex : $1,26 + 2,74$)
- ♦ recherche du complément d'un décimal à l'entier suivant (ex : $2,195 + \underline{\quad} = 3$)
- ♦ multiplication par 0,5 et 0,25.

Pour chaque séance, les étudiants-maîtres détailleront leur mise en place, les consignes, la progression utilisée dans le choix des exemples, les difficultés prévisibles.

Par groupes, les étudiants-maîtres construiront des jeux de cartes de type recto-verso (question au recto, réponse au verso), memory (appairer les cartes par 2) ou domino (mettre côte à côte questions et réponses) pour permettre à leurs élèves de mémoriser des procédures ou des résultats.

Ils chercheront par groupes le thème qu'ils souhaitent travailler : par exemple compléments à 10, 100 ou 1000 ; multiplication par 0,5 ou 0,25, complément à 1 de décimaux, multiplication par 10, 100, ou 1000. Ils indiqueront pour quel niveau ce jeu est préconisé.

3- ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE DES ACTIVITES GEOMETRIQUES

Objectifs :

Dans cette partie, l'élève-maître va comprendre l'appropriation par l'enfant des concepts géométriques au travers des activités proposées, comment passer de l'espace physique réel à l'espace géométrique, le rôle particulier de la validation et de la preuve dans le domaine géométrique.

Utilise-t-on des constats perceptifs ou des raisonnements géométriques? Quelles propriétés peuvent-elles être institutionnalisées et à quel niveau de classe ? Quelles est la place du vocabulaire géométrique et la place de l'instrument ? Comment prendre en compte les connaissances spatiales pour aller vers les connaissances géométriques ?

A- OBJET DE LA GEOMETRIE – LA CONSTRUCTION DE L'ESPACE

La géométrie se consacre à l'étude des **objets de l'espace**, de leurs propriétés et des relations qui existent entre eux. « Nous dirions aujourd'hui que la géométrie part du monde sensible pour le constituer en monde géométrique, celui des points, des droites, des cercles, des sphères, des courbes, des surfaces et des volumes » Chevallard

Les activités géométriques à l'école recouvrent deux champs distincts : les connaissances spatiales et les connaissances géométriques proprement dites.

- ♦ **Les connaissances spatiales** : Une partie des connaissances spatiales est acquise par l'enfant avant son entrée à l'école. Ces connaissances seront renforcées par l'enseignement. La construction des connaissances spatiales se fait à l'occasion des actions de l'enfant, et par l'intériorisation de ces actions, c'est à dire la capacité de s'en rappeler, de les anticiper donc de les penser sans les exécuter. Exemple : l'enfant rentre dans maison pour voir sa mère
Les connaissances spatiales concernent l'espace physique et permettent de structurer, de comprendre, d'agir sur cet espace.
- ♦ **Les connaissances géométriques** : Elles doivent être enseignées pour exister. Elles décrivent des objets « idéaux » : carré, cercle, ... L'enseignement des connaissances géométriques va s'appuyer sur les connaissances spatiales. En retour, les connaissances géométriques acquises vont permettre de modéliser plus efficacement l'espace physique et d'agir sur lui de façon pratique : résolution de problèmes de périmètres, d'aires, calculs de hauteurs, de distances, de volumes en considérant les objets réels (maisons, champs, routes, etc) comme des objets géométriques.

1 – Mise en situation des élèves – maîtres

Orientation et repérage : Où est caché le caillou ?

Situation 1 : On dispose plusieurs boîtes fermées (type boîtes d'allumettes ou autres emballages) à différents endroits de la salle. Un participant cache un caillou dans une des boîtes et

va donner des indications spatiales pour permettre de le trouver. Le meneur est placé près du tableau, deux autres participants qui ne savent pas où est le caillou sont placés de chaque côté de la salle. Ils ne peuvent se déplacer que lorsque le meneur a fini de donner les indications spatiales. Chacun d'eux choisit une boîte où il pense qu'est le caillou (ils peuvent choisir la même). Les autres participants sont placés en observateurs, ils remarquent les mots choisis par le meneur et les difficultés éventuelles de cette recherche ainsi que l'origine de ces difficultés. **La validation** est effectuée en ouvrant la boîte.

Variables : nombre de boîtes, près des murs ou en milieu de pièce, boîtes isolées ou groupées par 2, boîtes isolées ou groupées l'une sur l'autre, ...

Situation 2 : Les élèves-maîtres sont par 2. Cette situation est muette. Chacun choisit mentalement une boîte et dessine un plan de la salle. La boîte choisie sera marquée d'une croix. Puis les élèves-maîtres échangent le plan avec leur voisin, chacun essaie de déterminer quelle est la boîte choisie. **La validation** se fait réciproquement. S'il y a erreur (la boîte choisie n'a pas été retrouvée), les deux élèves-maîtres essaient ensemble de déterminer l'origine de l'erreur.

Le formateur fait vivre quelques situations de ce type en utilisant les variables et en changeant les différents acteurs. Il demande ensuite au groupe les obstacles qu'ils ont pu repérer dans la transmission des indications spatiales à l'oral ou en utilisant le plan.

2 – Structuration par le formateur

Cette situation permet aux élèves-maîtres d'appréhender quelques problèmes liés au **repérage**. On choisit de travailler avec un émetteur (le meneur) et deux récepteurs pour que les récepteurs se trouvent placés chacun dans une situation différente. Les positions de gauche et droite, devant et derrière seront donc obligatoirement relatives à un repère. L'obligation faite au meneur de donner ses indications avant que les récepteurs se déplacent empêche de préciser s'il y a erreur. Les ambiguïtés seront ainsi mieux mises en évidence. Par exemple, si le meneur dit : « le caillou est dans la boîte qui est devant le mur de droite », cette indication n'est pas suffisante. L'erreur ou l'hésitation des récepteurs le mettra en évidence.

La nécessité de communiquer par un plan muet met d'autres obstacles en évidence. L'erreur peut provenir d'un plan insuffisamment explicite : les éléments pertinents (porte, fenêtres, tables) ne sont pas indiqués. Le plan peut être faux, c'est à dire que les positions relatives des différents éléments ne sont pas respectées. Pour permettre la communication, ce plan n'a d'ailleurs pas besoin d'être à l'échelle. L'erreur peut aussi provenir du récepteur qui n'a pas réussi à s'orienter c'est à dire à faire correspondre le plan et la salle.

Il est intéressant d'analyser de façon détaillée les erreurs car ces erreurs se retrouveront dans le travail avec les élèves.

3 – Apports

Les connaissances spatiales acquises par l'enfant se mettent en place dans trois niveaux d'espace différents (d'après Brousseau):

- ♦ **le micro-espace** : c'est l'espace de la table, de la feuille de papier. L'oeil domine le micro-espace.
- ♦ **le méso-espace** : c'est l'espace d'une salle, d'une cour. On se déplace dedans. Les objets sont différents selon le point de vue.

- ♦ **le macro-espace** ; c'est le grand espace du village, de la ville, du pays, du monde. On doit se déplacer pour le voir et on se le représente surtout par des plans et des cartes.

A l'école, on travaille le plus souvent dans le micro et le méso-espace. On essaiera de lier le plus possible le travail dans le méso-espace (déplacements dans la cour, dans la salle de classe) et le travail sur table et sur feuille. En effet, l'enfant construit tout d'abord sa notion de l'espace en se déplaçant. Les premiers repères sont construits par rapport à son propre corps.

Les notions fondamentales : elles partagent chacune l'espace en deux morceaux suivant trois axes.

- ♦ **En haut, en bas** : c'est une notion qui se construit en lien avec le fait que l'humain est debout. Le corps humain repère et définit les positions de haut et bas.
- ♦ **Devant, derrière** : pour l'enfant, c'est tout d'abord ce qu'il voit (ce qui est devant) et ce qu'il ne voit pas (ce qui est derrière).
- ♦ **Gauche et droite** : ces notions sont les plus difficiles à construire car l'enfant n'a pas de moyen sensible pour différencier la gauche et la droite qui restent longtemps confondues.

Le repérage « **dedans-dehors** » (extérieur-intérieur) passe lui aussi par une expérience réelle. L'enfant est dans ou hors d'un endroit. Il entre ou il sort. D'autres notions : **entre, à côté** se construisent aussi tout d'abord relativement à l'enfant lui-même.

4- Quels obstacles ? Quelles difficultés ?

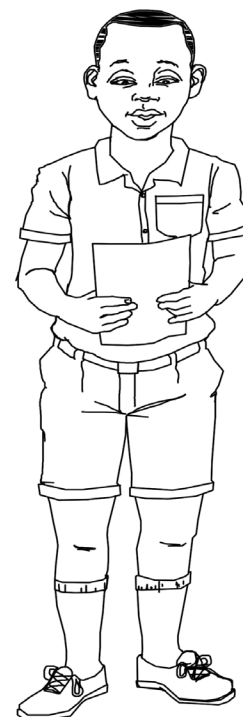
Les conventions qui permettent le repérage sur le feuille de papier

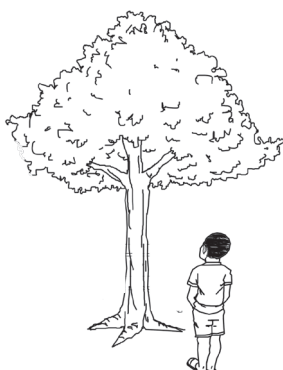
La feuille de papier est considérée comme disposée à la verticale en face de celui qui lit ou écrit. On parle de haut et de bas d'une feuille ce qui est contradictoire avec la construction des notions de haut et de bas. En revanche, cela aide l'élève à passer du plan du tableau au plan de la feuille.

Passer de la position par rapport à soi-même à une position relative à un repère.

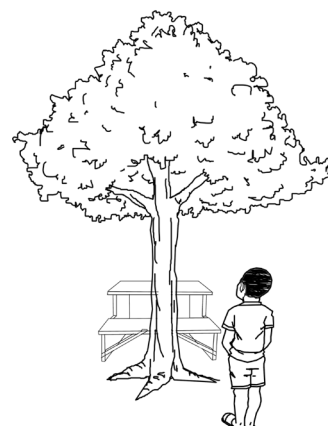
L'enfant va devoir abandonner une représentation centrée sur lui pour aller vers une compréhension des positions relatives des objets entre eux. Les situations d'enseignement peuvent l'aider.

- ♦ ces notions doivent d'abord être acquises relativement à lui-même,
- ♦ la distinction « en haut de, en bas de » est la plus facile à acquérir car c'est la position la plus stable. Si l'enfant se déplace dans la cour, la feuille qui est en haut de l'arbre pourra toujours être repérée de cette manière. La position est seulement relative au repère. Le déplacement de l'observateur ne change rien.

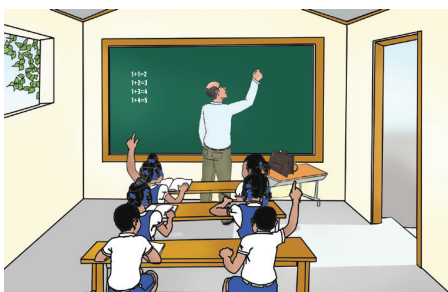




- ♦ les positions « devant-derrrière » sont relatives au repère et à l'observateur. L'arbre est derrière le banc mais si l'observateur change de place, il verra l'arbre devant le banc.



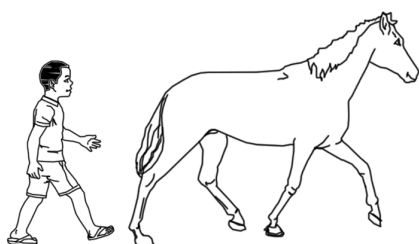
- ♦ le problème est le même pour « gauche-droite » : le côté droit est le côté gauche de l'observateur qui est en face. (la droite de l'enseignant est à gauche des élèves)



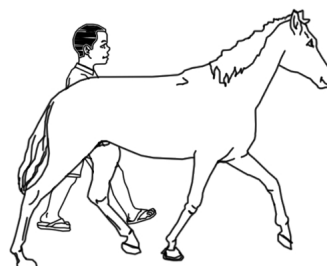
Un repérage particulier pour les humains et certains animaux

On considère souvent les positions relatives aux humains et à certains animaux suivant les axes de leur corps.

Paul est derrière le cheval



Paul est derrière le cheval (caché par le cheval)



5 - Activités de construction de l'espace

Ces activités vont permettre de travailler les positions relatives des objets. Travailler physiquement la notion permet de l'intégrer davantage. La situation de communication constitue un enjeu qui motive les élèves.

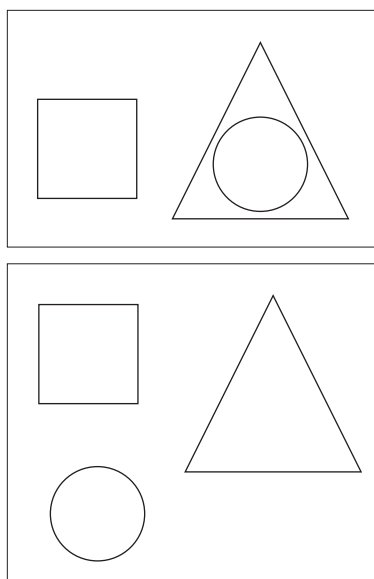
ACTIVITE 24 : PLACONS LES FORMES GEOMETRIQUES

Quand les élèves ont étudié les figures géométriques planes de base (carré, cercle, triangle), on peut s'en servir pour travailler les positions relatives des objets.

Variables :

- ♦ Le nombre d'objets géométriques
- ♦ L'enseignant dessine une configuration au tableau et demande de choisir entre plusieurs descriptions.
- ♦ L'enseignant dessine une configuration au tableau et demande aux élèves de décrire cette configuration.
- ♦ L'enseignant lit une description aux élèves qui choisissent entre plusieurs configurations dessinées au tableau.
- ♦ L'enseignant lit une description aux élèves qui dessinent la configuration correspondante sur leur feuille.

Le cercle est à l'intérieur du triangle. Il y a un carré à gauche du triangle.



Le triangle est en haut à droite. Le carré est à gauche du triangle. Le cercle est en dessous du carré.

ACTIVITE 23 : LE CAILLOU DANS LES BOITES

♦ Situation 1 : Oral

Des boîtes sont disposées le long des murs de la salle de classe. Les élèves sont par 2 . L'un cache un caillou dans l'une de ces boîtes. L'autre doit trouver sur l'indication de son camarade qui ne se déplace pas et ne désigne pas.

Variables : 4 boîtes (1 par mur)
 6 boîtes dont 2 ne sont pas au bord
 8 boîtes (2 par mur côte à côte)
 8 boîtes (2 par mur l'une en dessus de l'autre)
 de 10 à 12 boîtes (en inventant de nouvelles dispositions)

♦ Situation 2 : Utilisation d'un plan

Faites un dessin pour montrer à vos camarades où est caché le caillou. Vous n'avez pas le droit de parler . Vers le plan.

Variable : L'enseignant réalise un plan au tableau. Il trace une croix à l'endroit où est la boîte choisie. Les élèves doivent la déterminer.

♦ Situation 3: travail sur table en groupes de 4.

Les élèves sont autour d'une table.

Matériel : 3 boîtes, une capsule bleue, une capsule blanche, une capsule verte. On a 6 objets en tout .

L'enseignant dessine un plan au tableau en disposant les 6 objets et demande aux élèves de reproduire la même configuration. Reproduction par perception directe.

Un des élèves cache un caillou dans une des boîtes et devra transmettre la position aux autres qui auront fermé les yeux. La disposition des 4 enfants chacun d'un côté de la table (ou à terre en carré) oblige à préciser les positions relatives des objets entre eux et par rapport aux observateurs.

« Le caillou est à droite de la capsule bleue et derrière la capsule blanche » Qui regarde ?

« Si c'est moi qui regarde, le caillou est à droite de la capsule bleue et derrière la capsule blanche » Les élèves doivent imaginer ce que voit l'observateur. Communication à partir des positions relatives et du point de vue de l'observateur.

Variables : nombre d'objets de la configuration (4, 6 ou 8)
 obligation pour l'enfant qui parle de décrire la position d'après le point de vue d'un autre : Pour Rose, le caillou est à gauche de la capsule bleue »

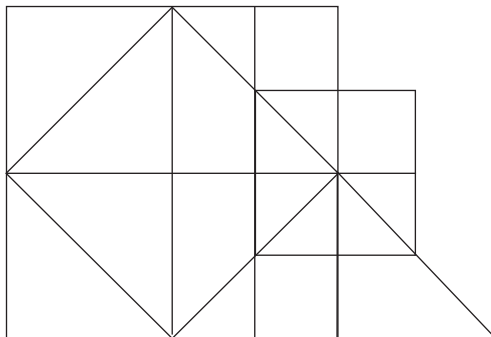
6 – Activités de réinvestissement - évaluation

Repérage sur quadrillage : En suivant la démarche utilisée dans cette partie : travail sur le méso-espace puis sur le micro-espace, vous construirez une progression d'activités de la 1ère à la 6ème année permettant de construire le repérage sur quadrillage : repérage des cases et des nœuds, codage des parcours.

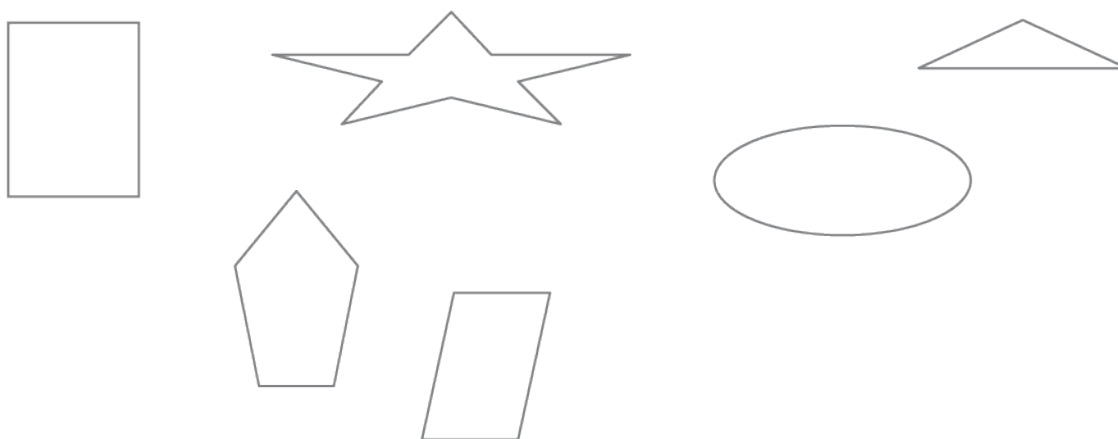
B - FIGURES GÉOMÉTRIQUES PLANES

1- Mise en situation des élèves-maîtres

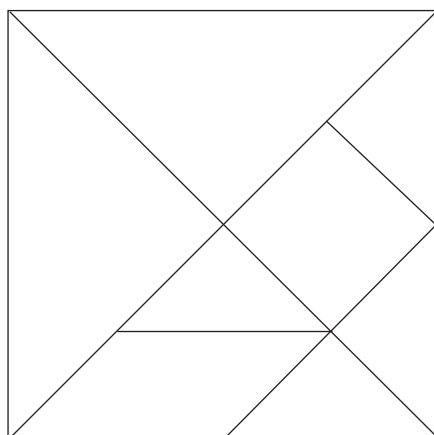
Situation 1 : Une configuration complexe est proposée. Combien y-a-t-il de carrés ?



Situation 2 - Jeu du portrait : Un participant choisit une figure sans dire laquelle.. Pour trouver quelle est cette figure, les autres lui posent des questions sur les propriétés géométriques.



Situation 3 : Le tangram : Reproduction d'une figure complexe avec une règle non graduée, un crayon et une partie de la figure. Détailler le programme de construction.



Quelles stratégies avez-vous mis en place pour résoudre ces deux situations ? Quelles difficultés avez-vous rencontrées ?

2- Structuration par le formateur

Situation 1 : Le carré est une figure très simple, connue depuis longtemps des participants. Cependant, la reconnaissance du carré est liée à la représentation qu'on s'en fait. Il peut être reconnu de façon **perceptive** : « il semble que c'est un carré » ou en utilisant ses propriétés de façon plus formelle (utilisation d'instruments). Parfois, le carré n'est pas reconnu quand il n'est pas en **position prototypique** (côtés parallèles aux bords de la feuille). Il est parfois difficile d'isoler un carré dans une configuration complexe. La difficulté augmente quand les côtés du carrés sont des parties d'autres segments ou quand la surface du carré est traversée par d'autres figures. Dans tous ces cas, on ne peut souvent se contenter de reconnaître la « silhouette » du carré mais on doit raisonner à partir de ses propriétés.

Situation 2 : Dans cette situation, on ne peut se baser que sur **les propriétés des figures**. Ces propriétés doivent être énoncées sous forme de questions de façon compréhensible pour que le meneur de jeu puisse répondre à la question. La détermination se fait par éliminations successives des autres figures .

« - Y a – t – il 4 angles » Oui → tous les quadrilatères peuvent convenir

« - Y a – t – il 4 angles droits ? » Oui → tous les rectangles peuvent convenir

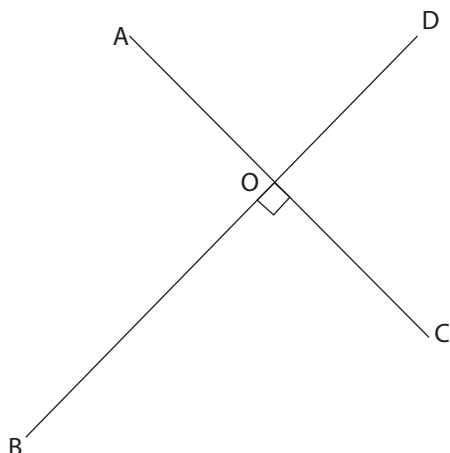
« Y a – t – il 4 côtés égaux ? » Non → le carré ne convient pas, la figure est donc un rectangle non carré.

Situation 3 : Le tangram est constitué de figures de base dont les aires sont des multiples les unes des autres. De même , les longueurs sont des multiples les unes des autres. En utilisant des notions **d'alignement** et **d'isométrie**, on peut reconstruire la figure complète : les côtés du petit triangle serviront de mesure. Les orientations des segments seront obtenues en prolongeant les côtés mais aussi en pivotant éventuellement le triangle pour utiliser son angle droit comme gabarit.

3 – Apports

La construction des **connaissances géométriques** s'appuie sur les **connaissances spatiales**. On fera donc d'abord appel à **la perception** que l'élève a des figures et des relations géométriques. La formulation permettra de dégager **des notions** (quadrilatères, losanges mais aussi perpendicularité, symétrie,...). La mise en place du **travail avec les instruments** aidera à dégager les propriétés et à les vérifier. Progressivement, on passera à une **conceptualisation** des notions. Les propriétés devront être prouvées théoriquement

Objet du réel	Objet graphique (figure)	Objet géométrique (idéal)
Perception (vu, manipulé)	Représenté physiquement (tracé, dessiné)	Représenté mentalement (pensé)
Validation avec l'oeil	Validation avec les instruments	Validation théorique (la figure ne prouve pas)



- ♦ Par exemple, 3 niveaux de représentation de l'angle droit

L'angle AOB est-il un angle droit ?

- 1) Oui , je le vois
- 2) Oui, je l'ai vérifié avec mon équerre
- 3) Oui car il est supplémentaire à BOC qui fait 90°

Cette progression s'étale sur les 6 premières années du cycle fondamental. Elle se construit dans le temps avec des répétitions et des retours suivant la difficulté des questions posées. Pour chaque notion mathématique nouvelle, même si elle est abordée en 6ème année, on passera par ces 3 phases même si ce passage devient plus rapide.

4 – Quelles difficultés ? Quels obstacles ?

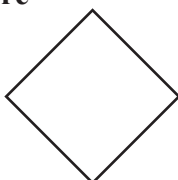
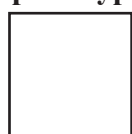
- ♦ **Difficultés liées aux connaissances spatiales mal assurées** : orientation et repérage.
- ♦ **Difficultés provenant de confusions** entre savoirs issus de l'expérience dans le monde réel et savoirs géométriques :
 - confusion entre le trait (ce qui est tracé) et la droite. Deux droites non parallèles ne sont pas vues comme sécantes car leurs traits ne se croisent pas
 - difficulté à concevoir le point géométrique
(la lettre est écrite à la place du point ou le point est très marqué).

A ————— B

A •————•

- ♦ **Difficultés liées à la représentation des images prototypes.**

Image-prototype du carré



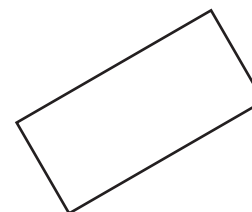
Est-ce un carré ?

Cette représentation du carré est moins courante.

Image-prototype du rectangle D'autres rectangles moins facilement reconnus par les élèves.



Le carré est un rectangle.



Rapport entre longueur et largeur

Les côtés ne sont pas forcément parallèles aux bords de la feuille.

Image-prototype du parallélogramme



D'autres parallélogrammes



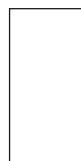
Rapport entre les côtés



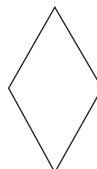
Orientation



Le carré est un parallélogramme



Le rectangle est un parallélogramme



Le losange est un parallélogramme

♦ Difficultés liées au conflit entre image graphique et déduction

- L'enfant croit ce qu'il voit ou ce qu'il croit voir. Il ne cherche pas à déduire des propriétés qui lui paraissent évidentes.
- L'enfant ne comprend pas l'emboîtement des catégories de figures : un carré est un rectangle donc c'est un parallélogramme donc c'est un quadrilatère donc c'est un polygone. Un carré est à la fois un rectangle et un losange alors que les rectangles ne sont pas tous des losanges. Cela contredit la représentation de figures distinctes avec des propriétés distinctes.

♦ Représentations erronées des objets géométriques ou de leurs relations :

- un triangle a toujours la pointe en haut

5 – Quelles aides ?

- Les figures planes particulières et non particulières peuvent être présentées comme matériel découpé (en papier ou carton) à manipuler. Cela permet de trier des figures y compris dans des représentations moins courantes et de ne pas les disposer dans une position « standard » par rapport à la feuille.
- L'utilisation de schémas « à main levée » permet de raisonner sur les propriétés connues au lieu de se contenter de constater.
- Le jeu du portrait met en évidence la détermination de la figure par ses propriétés. L'enfant apprend à définir une figure par le croisement des propriétés et l'élimination progressive des autres figures. Les erreurs logiques lui font se rendre compte que certaines propriétés ne sont pas suffisantes pour caractériser une figure. Le jeu du portrait peut être mené par l'enseignant qui propose plusieurs définitions et demande de choisir entre des figures dessinées au tableau.

6 – Quelles activités proposer aux élèves pour construire les savoirs géométriques

➤ **Classer**

Les objets et les propriétés géométriques sont définis en les distinguant de ce qui est différent. Ces classements vont concerner tout le cycle fondamental. Ils vont devenir de plus en plus pointus.

Exemples :

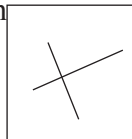
- ♦ tri de figures géométriques (carrés, cercles, rectangles, triangles)
- ♦ tri de polygones et non polygones (polygones, figures ouvertes, figures courbes)
- ♦ tri de polygones suivant le nombre de côtés (triangles, quadrilatères, pentagones, hexagones réguliers ou non)
- ♦ tri de triangles et non triangles (triangles, autres polygones, figures à 3 côtés dont un courbe)
- ♦ tri de quadrilatères parallélogrammes ou non parallélogrammes
- ♦ tri de parallélogrammes rectangles ou non
- ♦ tri de losanges carrés ou non, etc.

➤ **Reconnaître – identifier**

Les procédures sont différentes suivant le niveau de l'élève (reconnaissance perceptive, instrumentée, théorique).

Exemple : L'angle droit sera d'abord reconnu à l'oeil et tracé à main levée. Puis, il sera reconnu et tracé avec un gabarit puis une équerre. Enfin, il sera vu comme le produit de 2 droites perpendiculaires

Problème : Comment faire apparaître sur une feuille 4 angles droits sans instruments ni crayon ?



On plie au hasard et on replie en faisant coïncider le trait de pliure.

➤ **Reproduire - Pour reproduire, il faut :**

- ♦ analyser la figure
- ♦ définir un ordre des tracés en se servant des propriétés
- ♦ utiliser les instruments (nécessite de connaître les usages de l'instrument et d'avoir le savoir-faire pour s'en servir .

Variables : complexité de la figure
support uni, quadrillé, papier pointé
instruments à disposition

➤ **Construire à partir d'un programme de construction. Il faut**

- ♦ connaître les différents objets ou relations géométriques demandés
- ♦ connaître les propriétés permettant de les tracer
- ♦ connaître le sens particulier des verbes utilisés dans les programmes de construction (trace, place, nomme)

Variables : nombre d'instructions du programme de construction
instructions plus ou moins détaillées

7 – L'utilisation des instruments

➤ **Problèmes mathématiques liés au choix des instruments** : utilisation de la règle pour tracer les parallèles, peu d'utilisation du compas pour reporter les mesures, difficulté ans la lecture des mesures.

➤ **Problèmes techniques liés au maniement des outils** : maintien de la règle, mauvais placement de la règle, mauvais placement de l'équerre, difficulté à maintenir l'ouverture du compas.

Chaque outil nécessite un apprentissage spécifique et un temps d'entraînement.

- ♦ Mettre en place des tâches permettant un entraînement des savoir-faire : relier des points alignés, tracer des segments passant par un point, utiliser du papier calque.
- ♦ Imposer un outil (par exemple compas et règle non graduée)
- ♦ Utiliser un gabarit d'angle droit ou faire construire par pliage une équerre en papier qui ne comporte qu'un angle.
- ♦ Pour faire comprendre le fonctionnement du compas, on peut utiliser au tableau un système fait d'une punaise, une ficelle et une craie à condition que la ficelle soit bien tendue. La ficelle matérialise mieux le rayon du cercle que l'écartement du compas.

8 – Activités de classe

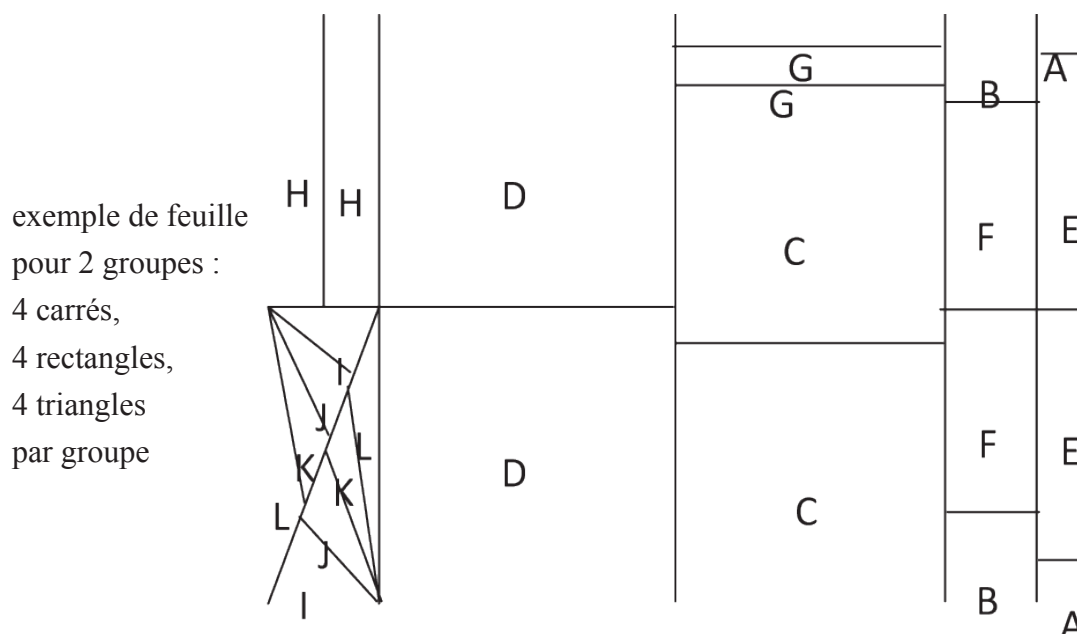
ACTIVITE 25 : CLASSER DES FORMES GEOMETRIQUES

1ère et 2ème AF

Objectif : Découverte des formes et des mots : carrés, rectangles, triangles

Matériel : par groupe de 5 ou 6 élèves, une enveloppe contenant 4 rectangles, 4 carrés, 4 triangles

Consigne : Dans cette enveloppe, il y a des formes géométriques. Je ne vous dis pas le nom de ces formes. Par groupe, vous allez classer ces formes, vous allez mettre ensemble les formes qui se ressemblent (annexe 1).



Déroulement de l'activité : Les élèves effectuent ce travail.

Les 4 carrés sont généralement identifiés sans problème. Un des rectangles est parfois mis avec les carrés. Dans ce cas, les élèves trouvent 5 carrés et 3 rectangles. Parfois, les élèves font deux lots de rectangles : les étroits et les larges. Les triangles sont généralement bien regroupés mais parfois les élèves les divisent en deux lots : les « étroits » et les « larges ».

Pendant ce temps, le maître passe entre les groupes pour encourager les échanges entre les élèves. Il regarde aussi quels sont les différents classements qui ont été faits.



Mise en commun :

Le maître a repéré les classements. S'il y a beaucoup de groupes, il ne les envoie pas tous au tableau. Il envoie au tableau un groupe pour chaque classement différent.

Par exemple :

Groupe 1 : 4 carrés, 2 rectangles, 2 rectangles, 4 triangles

Groupe 2 : 4 carrés, 4 rectangles, 2 triangles, 2 triangles

Groupe 3 : 5 carrés, 3 rectangles, 2 triangles, 2 triangles

Groupe 4 : 4 carrés, 4 rectangles, 4 triangles



Les groupes expliquent pourquoi ils ont classé ainsi . Parfois, ils utilisent les mots « rectangles, carrés, triangles » s'ils les connaissent.

A chaque fois, le maître demande : *Qui est d'accord ? Qui a fait le même classement ? Qui n'est pas d'accord ?* Il fixe au tableau les formes par lots comme les enfants les ont classées. Il écrit en-dessous les noms des groupes qui sont d'accord avec ce classement.

Puis, le maître fait le point sur ce qui pose problème dans le classement. Il fait discuter la classe sur chaque point qui pose problème

Pour les triangles, il peut dire : *Certains groupes ont mis ces 4 formes ensemble et d'autres groupes les ont séparées 2 par 2. Qui peut expliquer son choix ?* Les élèves peuvent répondre que les formes mises 2 par 2 sont pareilles. Ceux qui ont regroupé répondent qu'il s'agit toujours de triangles ou bien qu'il y a 3 côtés. Le maître reprend l'argument en faisant remarquer à toute la classe qu'il y a 3 côtés.

Pour les rectangles, le maître utilise la même démarche en interrogeant les élèves qui ont réuni les rectangles en un lot et ceux qui les ont séparé en 2 lots.

Erreur entre rectangle et carré : Un des rectangles est facile à confondre avec un carré. Beaucoup de groupes font l'erreur. C'est l'occasion de préciser la différence entre les formes. Pour déterminer s'il s'agit d'un carré ou d'un rectangle, on peut faire regarder d'un côté les carrés (même si les élèves ne connaissent pas le mot), de l'autre les rectangles et chercher ce qui est différent. Les élèves peuvent dire que certaines formes ont les côtés pareils et d'autres ont des grands et des petits côtés. Pour déterminer si on a un carré ou un rectangle, il faut mesurer les côtés. On peut suggérer aux élèves d'utiliser une bande de papier comme dans la leçon sur les mesures.

Lorsque les formes ont été triées, le maître conclut : *Ces formes s'appellent des carrés, celles-ci s'appellent des rectangles, celles-ci s'appellent des triangles.* Il écrit les mots correspondants au tableau à côté de chaque groupe de formes.

Trace écrite : Le maître écrit au tableau : un carré, un rectangle, un triangle. A côté de chaque mot, il trace la forme qui correspond. Dans leur cahier de mathématiques, les élèves écrivent les mots : un carré, un rectangle, un triangle. Ils se servent des formes géométriques pour tracer la forme correspondante sur le cahier en suivant le contour.

SEANCE 2 :

Objectif : Tracer des rectangles et des carrés en se servant des carreaux du cahier.

Matériel : par groupe de 5 ou 6 élèves: une feuille de papier quadrillé, un crayon, une règle, gomme.

Grande affiche dans la classe : un carré, un rectangle, un triangle avec les mots et le dessin correspondant à côté

Rappel : A la séance précédente, qu'est-ce que nous avons appris ? Le maître fait rappeler ce qui a été appris et demande à trois élèves de venir montrer pour l'un le carré, pour l'autre le rectangle et pour le troisième le triangle sur l'affiche.

Consigne : *Nous allons apprendre aujourd'hui à tracer des rectangles et des carrés. Par groupe, vous allez tracer sur cette feuille. Chaque groupe va tracer un carré et un rectangle. Vous discutez ensemble pour savoir comment les figures peuvent être bien tracées. Vous pouvez faire plusieurs essais et gommer.*

Activité : Pendant l'activité, le maître passe dans la classe pour encourager les échanges entre les élèves et pour relancer l'activité. Il peut demander : « Est-ce que vous êtes contents ? Est-ce que ça ressemble vraiment à un rectangle ? »

Résultats possibles des élèves (du moins élaboré au plus élaboré) :

- 1) Ils tracent un peu au hasard, ils ne suivent pas les lignes, les traits ne sont pas droits, les angles droits sont approximatifs.
- 2) Ils ne suivent pas les carreaux de cahier mais essaient de respecter les règles de côtés égaux en estimant à vue d'œil.
- 3) Ils suivent les lignes et comptent les carreaux du cahier.

Mise en commun : Chaque groupe dit quelle méthode il a utilisée. Le maître interroge les groupes en commençant par ceux qui ont la méthode la moins perfectionnée. Si aucun groupe n'a eu l'idée de travailler en suivant les carreaux du cahier, le maître explique cette technique. Il souligne qu'on prend le même nombre de carreaux pour les longueurs et le même nombre de carreaux pour les largeurs quand on veut tracer un rectangle. Quand on veut tracer un carré, on choisit un nombre de carreaux et on le garde pour les 4 côtés.

Trace écrite : Le maître écrit et dessine au tableau et fait recopier aux élèves sur le cahier de mathématiques :

- ♦ Un rectangle de 4 carreaux de longueur et 2 carreaux de largeur
- ♦ Un carré de 2 carreaux de côté.

ACTIVITE 26 : LES PROPRIETES DU CARRE ET DU RECTANGLE

SEANCE 1

Objectif : Connaître les propriétés du carré et du rectangle

Matériel : par élève : une feuille de papier (pour construire l'équerre)

par groupe de 5 ou 6 élèves, une feuille de papier, une règle, un crayon

Au tableau, il y a différentes formes géométriques qui sont tracées et , à côté deux colonnes : carrés et rectangles

Consigne : J'ai tracé des formes géométriques au tableau. Il y a des carrés, des rectangles et des formes qui ne sont ni des carrés, ni des rectangles. Chaque forme porte une lettre. Vous allez tracer deux colonnes : carrés et rectangles Vous écrirez dans ces colonnes les lettres des carrés et les lettres des rectangles.

Déroulement : Par groupe, les élèves ont une feuille et un crayon, ils tracent deux colonnes et mettent les titres « carrés » et « rectangle ». Ils classent les formes suivant qu'ils pensent que c'est un carré ou un rectangle.

Erreurs possibles :

Les parallélogrammes sont pris pour des rectangles, les élèves n'ont pas bien repéré les angles droits. Les élèves peuvent penser que c'est un rectangle « penché ».

Le carré « sur la pointe » n'est pas reconnu comme un carré car sa présentation ne correspond pas à celle qui est habituelle.

Mise en commun : Le maître ne fait pas expliquer son classement à chaque groupe car ce serait très long. Il trace deux colonnes avec le titre « carré » et « rectangle. Il reprend chaque forme dans l'ordre : A puis B, etc et interroge à chaque fois un groupe différent : Où avez-vous classé cette forme ? Les élèves répondent par exemple : Le B est un rectangle.

Le maître interroge la classe pour savoir si tout le monde est d'accord. Si tout le monde est d'accord, il inscrit la lettre; si tout le monde n'est pas d'accord, il inscrit la lettre avec un point d'interrogation. Il fait ensuite argumenter les élèves sur les formes qui posent problème. (qui ont un point d'interrogation). Si les parallélogrammes ont été rejetés par toute la classe, le maître demande quand même aux élèves pourquoi ils pensent que ce ne sont pas des rectangles. Cette argumentation sert à dégager les propriétés des carrés et des rectangles . Par exemple : ce n'est pas un rectangle parce que les angles sont penchés. C'est un carré parce que ses côtés sont pareils, etc...

Synthèse et trace écrite : Le maître reformule les arguments des élèves. Il dit et écrit au tableau :Un rectangle a 4 angles droits. Il a 4 côtés, ses côtés opposés ont la même longueur.

Un carré a 4 angles droits. Il a 4 côtés qui ont la même longueur. Il explique et montre « les côtés opposés ». Il vérifie la compréhension de ses élèves en les faisant reformuler et en les interrogeant individuellement: Qu'est-ce qui est pareil entre le carré et le rectangle ? Qu'est-ce qui est différent ? Le maître fait écrire la trace écrite sur le cahier de mathématiques.

SEANCE 2 : L'équerre

Objectifs: Utiliser et vérifier les propriétés des rectangles et des carrés. Comprendre l'utilité de l'équerre. S'en servir pour vérifier un angle droit ;

Matériel : une feuille de papier par élève

Par groupe : 1 feuille de formes dessinées qui semblent des rectangles ou des carrés (annexe 3)

Rappel : Le maître fait rappeler à quelques élèves ce qui a été appris la veille sur les propriétés des rectangles et des carrés.

Consigne : Voici une feuille avec des formes géométriques. Il y a des carrés, des rectangles et des formes qui ne sont ni des carrés, ni des rectangles. Chaque forme porte une lettre. Vous allez tracer deux colonnes : carrés et rectangles Vous écrirez dans ces colonnes les lettres des carrés et les lettres des rectangles.

Activité : La consigne est la même que dans la séance précédente . La différence est que toutes les formes semblent être des carrés ou des rectangles. Les élèves classent donc toutes les formes en 2 colonnes : carrés et rectangles.

Mise en commun : Le maître recueille les résultats des élèves dans les deux colonnes du tableau.

Lancement d'une nouvelle activité : Lorsque tous les élèves sont d'accord, il demande :

Comment savez vous que c'est un carré (ou un rectangle)? La réponse est : Il a 4 angles droits, ses côtés ont la même longueur.

En êtes-vous sûrs ? Comment peut-on être sûr que les côtés ont la même longueur ? On peut mesurer avec une bande de papier .

Comment peut-on être sûr que les angles sont droits ? Il faut utiliser un instrument qui s'appelle l'équerre.

Présentation de l'équerre : Le maître montre une grande équerre s'il en dispose. Il explique ensuite que chacun va fabriquer par pliage une équerre en papier plié qu'il faudra conserver pour d'autres activités. Il montre et demande aux élèves de réaliser leur équerre en même temps que lui.

Fabrication de l'équerre :

1. Partager une feuille de papier entre 2 élèves. Cela ne fait rien si la coupure est irrégulière.
2. Replier le morceau de papier sur lui-même « au hasard ».
3. Replier le trait de pliure sur lui-même très soigneusement .
4. L'angle droit est formé.



Utilisation de l'équerre :

Le maître fait venir quelques élèves au tableau pour montrer comment on utilise l'équerre pour vérifier que les angles sont droits. Il leur fait expliquer ce qu'ils font et il le reformule : on place l'angle droit sur l'angle qu'on vérifie, on place un bord de l'équerre sur un des côtés de l'angle et on regarde si l'autre bord de l'équerre est bien sur l'autre côté de l'angle. Si oui, c'est un angle droit, si non, ce n'est pas un angle droit.

Travail par groupes : Les élèves reprennent la feuille de l'activité précédente et revérifient les longueurs et les angles avec les bandes de papier et les équerres. Ils constatent que certaines figures ne sont pas des carrés mais des rectangles et que certains rectangles ne sont pas des rectangles . (le mot parallélogramme n'est pas au programme).

Mise en commun : Pour que la mise en commun ne soit pas trop longue, on interrogera chaque groupe sur une figure différente et on fera discuter la classe pour voir si les autres groupes sont d'accord ou non. Par exemple, le maître dira : Pour la figure A, le groupe 1 va expliquer ce qu'il a trouvé. Est-ce que la figure A est un carré, un rectangle ou une autre figure ? Expliquez pourquoi . Les élèves répondent que la figure A est une autre figure car les angles ne sont pas droits. Et le carré et le rectangle ont des angles droits. Le maître demande alors aux autres groupes s'ils sont d'accord et s'ils ne sont pas d'accord, pourquoi ? S'ils n'arrivent pas à trancher ou s'ils arrivent à une réponse fausse, le maître fait refaire l'expérience (mesure des longueurs ou des angles) en collectif.

SEANCES SUIVANTES :

Tracer des carrés ou des rectangles en utilisant l'équerre et les bandes de papier.

S'entraîner à vérifier si les figures dessinées sont des carrés, des rectangles ou d'autres figures.

Activités pour les classes de 5ème et 6ème AF

Objectifs :

- Construire les figures géométriques simples (droite, demi-droite, segment de droite, droites parallèles, droites perpendiculaires, médiatrice d'un segment, polygones).
- Calculer le périmètre, l'aire des figures planes simples.
- Calculer l'aire latérale et le volume des solides simples.

Techniques d'animation : Brainstorming, travail individuel, travail de groupe et plénière.

CONTENU ESSENTIEL

1. Une droite est une suite illimitée de points.
2. Une demi-droite comporte toujours un point d'origine.
3. Un segment de droite est limité par deux points appelés extrémités du segment. Un segment de droite d'extrémités A et B est noté $[AB]$.
 - ♦ Deux droites sont dites parallèles quand elles ne se rencontrent jamais (le formateur doit faire ressortir le fait que dans l'espace, deux droites peuvent ne jamais se rencontrer sans qu'elles soient parallèles. Les murs de la salle peuvent être utilisés pour expliciter cette situation).
 - ♦ Des droites sont dites perpendiculaires quand elles forment un angle droit.

Activité 1 : Notion de droite 5ème et 6ème AF

Consigne : Plier une feuille de papier en deux. Marquer le pli observé, puis ouvrir la feuille. Que remarque-t-on ? Peut-on la prolonger cette trace d'un côté ? Et de l'autre côté ? Jusqu'où peut-on la prolonger ?

Conclusion : Une droite est illimitée

Activité 2 : Tracer des droites 5ème et 6ème AF

Consigne : Marquer sur une feuille de papier trois points S, T, U. Tracer une droite passant par le point S. Combien peut-on tracer de telles droites ? Que peut-on conclure ? Tracer une droite passant par S et T. Peut-on en tracer d'autres ? Quelle conclusion peut-on tirer ? Tracer une droite passant par les trois points. À quelle condition cela est-il possible ?

Conclusions :

- ♦ Par un point, on peut faire passer une infinité de droites.
- ♦ Par deux points distincts, on ne peut mener qu'une droite et une seule. La droite passant par deux points A et B est notée (AB) .
- ♦ Par trois points, on peut faire passer une seule droite, si et seulement s'ils sont alignés.

Activité 3 : Demi-droite *5ème et 6ème AF*

Consigne : Tracer une droite (zt) sur une feuille, puis marquer un point O sur la droite. Que remarque-t-on ?

Conclusion : Un point O d'une droite (D) partage cette dernière en deux parties appelées demi-droites. On les note respectivement par [Oz) et [Ot).

Activité 4 : Segment de droite *5ème et 6ème AF*

Consigne : Tracer une droite (D), puis marquer deux points E et F sur cette droite. Que représente la portion de droite limitée par ces deux points ? La noter symboliquement.

Conclusion : Un segment de droite est une portion de droite limitée par deux points appelés extrémités du segment.

Activité 5 : Droites perpendiculaires. *5ème et 6ème AF*

Matériels : équerre et rapporteur.

Consigne : Plier deux fois une feuille de papier en repliant sur elle-même la pliure. Ouvrir et vérifier à l'aide de l'équerre et/ou du rapporteur que les droites forment un angle de 90 degrés.

Conclusion : Deux droites sont perpendiculaires si elles se rencontrent à angle droit.

Activité 6 : Tracer des droites perpendiculaires *5ème et 6ème AF*

Matériels : équerre, rapporteur

Consigne : Tracer une perpendiculaire à une droite (D) donnée et passant par un point A quelconque en utilisant les instruments géométriques. Combien de situations sont possibles ? Peut-on tracer une seconde perpendiculaire à (D) passant par A ?

Conclusion : Il y a deux situations possibles : le point est situé sur la droite ou bien il n'est pas sur la droite. Dans les deux cas l'équerre ou le rapporteur permet de construire très facilement cette droite et par un point donné, on peut faire passer une et une seule droite perpendiculaire à une droite donnée.

Activité 7 : Distance entre deux droites *5ème et 6ème AF*

Matériels : règle, équerre, compas

Consigne : Sur une feuille, tracer une droite (D). Marquer sur cette droite deux points A et B. Marquer un point E sur la perpendiculaire à (D) passant par A et un point F sur la perpendiculaire à (D) passant par B de sorte que l'ouverture du compas mesurant la distance des points A et E soit la même que celle mesurant la distance des points B et F. Tracer la droite (EF). En prolongeant les droites (D) et (EF) finiront-elles par se rencontrer ? Que peut-on dire de ces deux droites ?

Conclusion : La droite (EF) est parallèle à la droite (D) car les points E et F sont situés à la même distance de la droite (D)

Activité 8 : Médiatrice d'un segment *5ème et 6ème AF*

Consigne : Tracer un segment $[AB]$ sur une feuille de papier. Déterminer le point I milieu de ce segment. Combien de droites perpendiculaires à $[AB]$ passant par le point I peut-on tracer ?

Conclusion : La médiatrice d'un segment de droite est la perpendiculaire qui passe par son milieu.

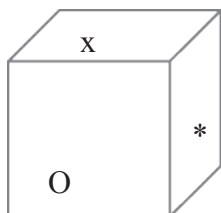
Activités de réinvestissement-évaluation

- ♦ En utilisant le programme de l'école fondamentale, construire une progression sur toute la durée des 1er et 2ème cycles en ce qui concerne les angles.
- ♦ Construire une séquence de plusieurs séances pour les 5ème et 6ème AF pour comparer les propriétés des différents quadrilatères : trapèzes, parallélogrammes, carrés, losanges, rectangles. Quelles situations mettrez-vous en place ? Quels sont les obstacles prévisibles ? Sur quelles variables allez-vous jouer ?

C- LES SOLIDES

1 – Mise en situation des étudiants-maîtres

Une figure représentant un cube en perspective cavalière avec des signes sur les faces. Chaque signe est représenté deux fois : sur la face visible et sur la face cachée en face. On leur demande de créer des patrons de cubes correspondant à ce cube.



2- Structuration par le formateur

Le formateur fait évoquer par les étudiants-maîtres leurs démarches et les difficultés rencontrées. La fabrication du patron nécessite « d'aplatir mentalement » le volume et d'imaginer la place relative de chaque face. Il y a plusieurs patrons possibles. Le formateur les fera tous ressortir en portant la discussion sur la validation : « Comment peut-on être sûr qu'on a trouvé tous les patrons ? »

3- Apports

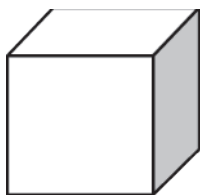
Le point de vue : Le travail sur les solides met en jeu la question du point de vue qui a été travaillé au début de l'école fondamentale avec les activités sur le repérage. Certaines difficultés peuvent se révéler à cette occasion. Le passage au plan met en jeu les positions de voisinage des différentes faces.

Le passage du plan au volume : Les solides étudiés à l'école fondamentale ont généralement des faces qui sont des polygones.

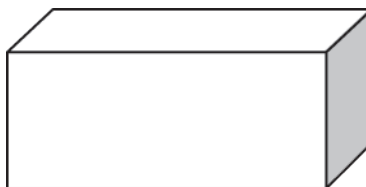
Le vocabulaire des solides : faces, arêtes, sommets.

Comment aborder l'étude des solides ? Il est indispensable d'utiliser du matériel pour travailler sur les solides. Il peut s'agir de blocs en bois, en matière plastique ou en carton que l'on peut mettre ensemble d'une façon ou d'une autre (dans certains cas). Ils permettent de réaliser des constructions diverses (pour réaliser des constructions, il est important d'utiliser des blocs qui ont des dimensions qui peuvent être mises ensemble).

Les boîtes d'emballage constituent une classe de solides de formes variées. Dans la majorité des cas, elles ont 6 faces. Prenons par exemple une boîte d'allumettes, elle comporte 6 faces rectangulaires. Un dé (cubique) comporte aussi 6 faces mais celles-ci sont toutes des carrés.



A)



B)



C)

Le solide A) est un cube.

Le solide B) est un pavé droit ou un parallélépipède rectangle.

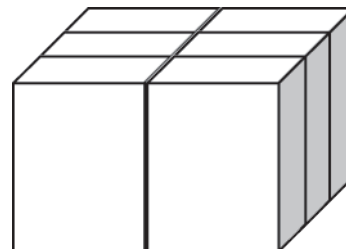
Le solide C) est un cylindre droit.

Les faces du solide C ne sont pas des polygones.

Activité

Consigne : Observe bien le solide ci-contre :

- ♦ Combien contient-il de faces ?
- ♦ Quelle figure géométrique représente chacune de ses faces ?
- ♦ Comment peut-on appeler un tel solide ?



Conclusion

Tout solide de 6 faces qui sont toutes des carrés est un cube.

Tout solide ayant 6 faces rectangulaires (certaines d'entre elles peuvent être des carrés) est un pavé droit.

L'intersection de deux faces consécutives est un segment de droite. On l'appelle arête.

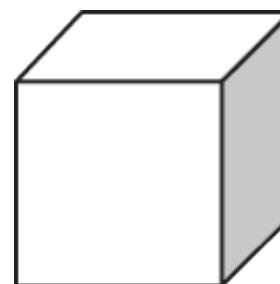
En développant une boîte d'emballage en carton suivant des arêtes, on obtient un morceau de carton appelé patron de la boîte.

Activité

Consigne : Considérer le cube ci-contre :

1. Comparer ses arêtes entre elles.
2. Comparer ses faces entre elles.
3. Qu'obtient-on en mettant quatre cubes ensemble ?

Envisager les différents cas.



Conclusion : Dans un cube, toutes les arêtes sont de même longueur et toutes les faces sont des carrés superposables. Tout dépend de la façon dont on place les quatre cubes, on peut obtenir des solides de formes très variées.

Remarque : Le formateur peut demander aux étudiants-maîtres : quels cas est à exclure si l'on a considéré six cubes au lieu de quatre ?

Il peut aussi exploiter les murs de la salle de cours pour expliciter les notions de faces, d'arêtes, de sommets, d'orthogonalité, etc.

Les patrons de solides : Les patrons sont des développements de solides.

Activité : Il est intéressant que les élèves construisent un patron en ayant l'objet solide réel entre les mains. Par groupe, ils disposent d'une feuille de papier et d'un crayon. Ils tracent les faces en se servant de l'objet comme d'un gabarit et en le faisant pivoter. Ils vérifient en découpant et en montant le solide.

- ♦ Commencer par le cube : plus facile car toutes les arêtes sont égales .
- ♦ Continuer par différents pavés droits.
- ♦ Quand les élèves sont habitués à ce travail, on peut leur demander d'anticiper l'allure du patron avant le traçage.
- ♦ Patron du cylindre, du cône, de différentes pyramides.

4 – Quels obstacles – Quelles difficultés ?

- **Confusion entre figures planes et solides :** Les élèves continuent à se repérer d'après la géométrie plane qu'ils ont étudiée. Ils confondent angles et sommets, arêtes et côtés. Ils disent d'un cube que c'est un carré, etc.

L'étude des solides doit se faire d'abord avec des solides en volume plus qu'avec des représentations planes que les élèves ont du mal à comprendre. Ces représentations planes viendront ensuite.

Le jeu du portrait : C'est le même que pour les figures planes mais avec des solides. Le groupe dispose de plusieurs solides. Un élève en choisit un sans dire lequel. Les autres doivent déterminer le solide choisi en lui posant des questions en qui utilisent le vocabulaire: sommets, faces, arêtes.

L'enseignant fait déterminer aux élèves quel est le solide : « il a 8 faces, 6 sont des rectangles, 2 sont des hexagones

- **Difficulté à orienter les différentes faces en réalisant un patron.** L'enseignant fait colorier de différentes couleurs les différentes arêtes et sommets d'un cube et demande de reporter cette couleur sur les 2 côtés qui constituent une arête et les 3 angles qui constituent un sommet.

Activité de réinvestissement-évaluation

Une activité peut viser essentiellement la reconnaissance de solides en présentant un ensemble de solides aux étudiants-maîtres et en leur demandant de classer ceux qui vont ensemble, ceux qui ont les mêmes propriétés : Nombre de faces, formes des faces, etc. Dans une telle activité, le formateur peut demander aux étudiants-maîtres groupés : Quelles questions auraient-ils posées à leurs élèves en telle ou telle classe ?

4- ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE DES GRANDEURS ET MESURES

Objectifs de formation :

Dans cette partie, l'étudiant-maître va étudier ce que sont les grandeurs et comprendre la différence entre grandeurs et mesures. Il va étudier les obstacles liés à ces notions et comment elles se construisent chez les élèves. Il va apprendre à mettre en place des activités respectant les différentes étapes de cette construction pour chacune des grandeurs considérées. Il va dégager la notion de mesure-étalon et son utilité pour comparer des grandeurs.

A- LES GRANDEURS – DEFINITION - COMPARAISON DIRECTE ET INDIRECTE DE GRANDEURS – MESURE ETALON

1- Mise en situation des élèves-maîtres

Situation 1 : Les étudiants - maîtres sont par groupes de 3 ou 4. Ils comparent les longueurs de différents objets déplaçables de longueurs proches pour les ranger du plus long au moins long (cahier, livres, feuilles).

Situation 2 : Comparaison de 2 objets non déplaçables de longueurs proches, de façon qu'on ne puisse pas répondre directement avec certitude (par exemple une table et une fenêtre). Des bandes de papier et des morceaux de ficelle sont mis à disposition des groupes.

Situation 3 : Une comparaison de 2 autres objets non déplaçables. une mesure-étalon (morceau de bois ou de carton d'environ 5 ou 6 cm).

2 - Structuration par le formateur

- ♦ Le formateur interroge les groupes pour chacune des situations sur la manière dont ils ont procédé. La situation 1 induit une **comparaison directe** entre les objets en les juxtaposant.
- ♦ Dans la situation 2, la comparaison directe n'est plus possible. La situation 2 induit une **comparaison indirecte** en utilisant un troisième objet qui est marqué ou coupé à la longueur du premier.
- ♦ Si le troisième objet a une longueur plus petite que les objets à comparer, il devient nécessaire de reporter une **mesure-étalon**. On compte combien de fois cette mesure est reportée pour comparer les longueurs. Ce nombre s'appelle la mesure de la longueur.

3 - Apports

Cette mise en situation retrace la construction du concept de mesure. Ce concept s'est construit pour faciliter la comparaison des grandeurs.

➤ Les différentes grandeurs :

- ♦ longueurs
- ♦ masses

- ♦ contenance
- ♦ aires
- ♦ volumes
- ♦ durées

Les grandeurs existent indépendamment de leur mesure. Une grandeur est une propriété d'un objet. Les toutes premières comparaisons de grandeurs peuvent se faire de manière sensorielle si les grandeurs à comparer ne sont pas trop proches.

➤ **Les étapes d'une progression pour étudier une grandeur**

1. situation qui implique une **comparaison directe** : objets proches et déplaçables
2. situation qui implique une **comparaison indirecte** : objets éloignés dans le temps ou l'espace. On utilise un objet intermédiaire transportable.
3. situation avec un objet choisi comme **étalon**. On compte combien de fois l'objet à mesurer est plus grand que l'objet-étalon. On peut travailler sur le nombre (mesure) au lieu de travailler sur la grandeur.
4. Construction d'un **instrument de mesure** gradué. On explique le choix d'une mesure-étalon commune pour pouvoir communiquer : mesures haïtiennes et mesures du système métrique.
5. Adaptation de l'unité de mesure à la grandeur à mesurer. Il est nécessaire de déterminer des **sous-unités**. Cela implique l'apprentissage de la mesure en incluant les sous-unités et celui des calculs de conversion.

4 – Quels obstacles, quelles difficultés ?

Difficulté à considérer séparément les différentes grandeurs d'un objet. L'enfant pense qu'un objet d'un gros volume est plus lourd, qu'un récipient haut (longueur) a une plus grande contenance. L'aire est confondue avec le périmètre.

- ♦ *Proposer des situations qui remettent en question les conceptions erronées des élèves : objets de même volume mais de poids différent, récipient très haut avec une contenance inférieure à un récipient bas. On commencera par faire comparer par estimation (à ton avis, lequel contient le plus ?) avant de procéder à la comparaison.*

Difficulté à passer de la mesure avec une mesure-étalon à la mesure avec un instrument (règle graduée, récipient gradué). La graduation est repérée alors que c'est l'intervalle entre deux graduations qui constitue la mesure-étalon.

- ♦ *Faire construire une règle graduée en reportant sur une bande de papier la mesure-étalon utilisée pour la première activité de mesurage. On peut construire un récipient gradué en transvasant plusieurs fois le contenu de la mesure-étalon et en marquant à chaque fois le niveau atteint.*

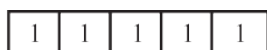
5 – Le cas particulier des mesures de longueur

- ♦ C'est la grandeur première et son nom varie suivant les circonstances où elle est utilisée : longueur mais aussi taille, hauteur, épaisseur, altitude, périmètre, sont des longueurs.
- ♦ C'est la grandeur de base qui sert aux calculs d'aires et de volumes (produits de mesures de longueurs)

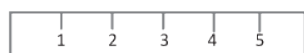
- ♦ On peut suivre les étapes assez facilement ; les objets à mesurer sont nombreux et de plusieurs dimensions. Il est facile de construire une mesure-étalon en papier ou en carton. Les élèves rencontrent au début des difficultés techniques pour faire coïncider les extrémités dans les activités de comparaison directe ou indirecte et pour le report exact de l'unité-étalon.
- ♦ On peut faire construire une règle graduée par les élèves en reportant l'unité-étalon et en la marquant sur la règle.

Les élèves peuvent avoir des difficultés à passer au repérage numéroté où on lit la mesure au lieu de compter le nombre de mesures. Pour les aider, on peut utiliser d'abord une règle où les mesures-étalons sont marquées mais non numérotées.

Règle sur laquelle on compte les mesures



Règle sur laquelle on lit la mesure.



- ♦ Les mesures de longueur sont à l'origine du système international (système métrique)

Mesures

- ♦ Mesurer une grandeur, c'est la comparer à une autre grandeur prise comme unité. C'est dire combien de fois cette grandeur contient l'unité.
- ♦ Une « unité de mesure » est une grandeur de référence qui permet de mesurer d'autres grandeurs de même type.



B- LES MESURES – MESURES HAITIENNES ET MESURES DU SYSTEME INTERNATIONAL – CONVERSIONS

1 – Mise en situation des élèves-maîtres

Chaque groupe a à sa disposition trois bandes de papier : une grande, une moyenne, une petite. La grande mesure 3 moyennes et la moyenne mesure 3 petites. La grande bande peut mesurer la longueur d'une feuille de papier A4 (on peut choisir une autre mesure.

Le formateur demande aux étudiants-maîtres par groupes de mesurer différentes longueurs , porte, mur, cahier, etc ... en utilisant les bandes.

- ♦ *Quelles bandes utilise-t-on pour quel objet ?*
- ♦ *Peut-on encadrer la longueur d'un objet par deux mesures de cette manière : 3 grandes bandes < longueur de la table < 4 grandes bandes ?*
- ♦ *Peut-on préciser cette mesure en utilisant les bandes moyennes ou petites .*
- ♦ *Sans refaire la mesure, peut-on savoir ce que l'on obtiendrait si on n'utilisait que des petites bandes ?*

2 – Structuration par le formateur

En faisant s'exprimer les différents groupes sur l'expérience qu'ils viennent de vivre, le formateur s'attachera à faire ressortir les points suivants :

- ♦ Une mesure n'est jamais exacte ; Si on mesure la table en utilisant une grande mesure de référence, on obtiendra **un encadrement** .
- ♦ On peut préciser cette mesure en utilisant la bande moyenne : 3 grandes bandes et 1 bande moyennes < long table < 3 grandes bandes et 2 bandes moyennes.
- ♦ On peut encore augmenter cette précision en utilisant une mesure plus petite : 3 grandes bandes + 1 bande moyenne + 1 petite bande < long table < 3 grandes bandes + 1 bande moyenne + 2 petites bandes
- ♦ Pour savoir le nombre de petites bandes, on doit effectuer **une conversion**, c'est à dire transformer les grandes et moyennes bandes en petites bandes.

1 grande bande = 3 moyennes bandes = 9 petites bandes

Le mécanisme de la conversion est un mécanisme de multiplication.

Dans le cas que les étudiants-maîtres viennent de vivre, il n'y a pas de mesure précise. L'utilisation de fractions et de nombres décimaux permet d'augmenter la précision de la mesure.

La dimension de l'objet nous donne des indications sur l'unité à utiliser : cela n'aurait pas de sens d'exprimer la distance entre deux villes en centimètres ni même en mètres. On exprime cette distance en km car la précision souhaitée est de l'ordre du km ou de l'hectomètre (= 100m = km).

3- Apports

Avant la généralisation du système métrique, chaque communauté avait développé son propre système de mesures. En Haïti, on utilise encore couramment certaines mesures traditionnelles.

1. Longueur

1 pouce	2,54 centimètres
1 pied	30,48 centimètres
1 pied	12 pouces
1 aune	44 pouces
1 aune (tissu/toile)	1,118m
1 brasses	1,624m

2. Capacité

1 barrique (baril)	2,25 hectolitres
1 baril	40 grosses marmites
1 grosse marmite	5 petites marmites
1 gallon	3,785 litres
1 fer-blanc	5 gallons

3. Agraire (Aire/Surface)

1 carreau de terre	1,293 hectare
1 hectare (ha)	1 hectomètre carré (hm ²)
1 are (a)	1 décamètre carré (dam ²)
1 centiare (ca)	1 centimètre carré (cm ²)

Le Système métrique ou Système International a été inventé pour permettre une uniformisation des mesures.

Les unités de mesure utilisées à l'école fondamentale sont :

- ♦ mesure de durée : la seconde
- ♦ mesure de longueur : le mètre
- ♦ mesure de capacité : le litre
- ♦ mesure de masse : le gramme

Chacune de ces unités de mesure possède des multiples et des sous-multiples. On repère ces multiples et sous-multiples par les préfixes :

Sous-multiples

- ♦ déci : 1/10ème de la mesure-étalon
- ♦ centi : 1/100ème
- ♦ milli : 1/1000ème

Multiples :

- ♦ déca : 10 mesures-étalons
- ♦ hecto : 100 mesures-étalons
- ♦ kilo : 1000 mesures-étalons

Les élèves doivent pouvoir estimer une mesure, savoir quelle est l'unité de mesure qui correspond à une grandeur donnée, choisir la bonne unité de mesure à utiliser (c'est parfois le multiple ou le sous-multiple de la mesure-étalon.)

De plus, ils doivent connaître la relation entre les différents multiples et sous-multiples d'une même unité de mesure. Ils doivent aussi pouvoir passer de l'un à l'autre et pour cela effectuer des conversions.

4 – Quelles difficultés ? Quels obstacles ?

- ♦ La grandeur n'a pas été bien repérée. Les élèves confondent longueur et volume ou bien masse et volume. Il s'agit d'un obstacle didactique. On est passé trop vite à la mesure sans travailler assez sur les comparaisons de grandeur.

Revenir à des activités sur les grandeurs.

- ♦ Les élèves confondent cm, mm et m. Ils les utilisent un peu au hasard et n'ont pas le souci de la vraisemblance des résultats.

Il faut éviter d'introduire tous les multiples et sous-multiples en même temps car les élèves auront tendance à confondre. On introduit d'abord les unités de mesure les plus courantes : mètre et centimètre. A chaque fois, on fait repérer aux élèves ce qu'est réellement cette mesure. Très régulièrement, on demande à la classe d'estimer des mesures : « à votre avis, combien mesure le mur de la classe ? Et le côté de votre cahier ? » de façon à faire vivre le mètre et le centimètre dans la classe. Après avoir recueilli l'avis de tous les élèves, on fera procéder au mesurage réel. Ce petit jeu répété provoquera l'intérêt des enfants qui s'habitueront à estimer des mesures au quotidien. De la même façon, pour introduire la notion de km, on fera estimer des distances connues : de l'école au marché par exemple, d'une ville à une autre avant de donner la réponse aux élèves. On fera mesurer aux élèves la longueur de leur main ou de leur empan (dimension entre

leur pouce et leur petit doigt, main ouverte). Toutes ces activités d'estimation puis de mesurage seront répétées dans l'étude des autres mesures.

- ♦ Les élèves ont des difficultés à servir des instruments de mesure.

L'emploi des instruments de mesure nécessite un apprentissage. Généralement, il faut lire une graduation. Pour la règle graduée, il faut de plus faire coïncider le zéro (et non le bout de la règle) avec l'extrémité du segment. Cela doit être travaillé explicitement avec les élèves.

Mesures de longueur					
Multiples			Unité	Sous multiples	
km	hm	dam	m	dm	cm
1					
1	0	0	0		

C – CAPACITES ET MASSES

1 – Mise en situation des étudiants-maîtres

- Les étudiants-maîtres disposent par groupe de 2 récipients de contenances ou capacités proches. Ils doivent les comparer après les avoir estimés. Ils peuvent utiliser de l'eau ou du sable mis à leur disposition.
- Les étudiants-maîtres doivent ranger les capacités de 3 récipients après les avoir estimés. Ils disposent d'un récipient plus grand et de marqueurs.
- Chaque groupe d'étudiants-maîtres dispose d'un récipient. Il faut ranger les capacités de ces récipients. Il n'y a pas de récipient plus grand mais chaque groupe dispose d'un verre en plastique.

2 – Structuration par le formateur

- Le formateur interroge les groupes sur les méthodes utilisées dans les trois situations. Il cherche à faire établir le parallèle avec les situations de comparaisons de longueur.

Situation 1 : comparaison directe

Situation 2 : comparaison indirecte

Situation 3 : utilisation d'une unité non conventionnelle

- Dans la première situation, il suffit de remplir un des récipients et de le vider dans le deuxième et ainsi de constater quelle est la plus grande capacité. Le résultat peut être très différent de l'estimation. Le formateur interrogera les étudiants pour chercher sur quoi s'est basée leur estimation.
- Dans la deuxième situation, un récipient plus grand va être marqué à la contenance des récipients à comparer. Difficulté de méthode si ce sont des enfants qui réalisent cette situation : il faut qu'ils pensent à vider le grand récipient entre chaque marquage. On peut les laisser faire cette erreur pour qu'ils prennent conscience que la comparaison ne sera ainsi pas valable.

Dans la troisième situation, on peut utiliser le verre en plastique comme unité non conventionnelle de mesure. Chaque groupe vide son récipient à l'aide du verre en plastique et compte le nombre de mesures. Pour pouvoir comparer efficacement, il faut que les verres soient de contenances égales et remplis entièrement.

3 – Apports

- On retrouve la progression utilisée pour les comparaisons de grandeurs. La notion de capacité risque d'être confondue avec la notion de longueur. Si l'objet est très long, les élèves pensent qu'il contient davantage. Il est intéressant de provoquer une estimation : « A ton avis, lequel contient le plus ? » mais aussi de travailler la notion de preuve : « Comment peut-on en être sûr ? »
- La contenance (appelée aussi capacité) a une relation directe avec le volume d'un objet. Le volume considère l'espace occupé par un objet tandis que la contenance fait référence à la quantité qu'un objet creux peut contenir. On transforme les volumes en contenances par la relation $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ litre}$. Ce point est développé au chapitre sur les volumes.

- La masse dépend de la quantité de matière d'un objet. Le poids dépend de la gravité terrestre. Les deux valeurs sont liées mais sur une autre planète, nous aurions la même masse mais pas le même poids. A l'école fondamentale, on ne distinguera pas les notions de poids et de masse.

4- Obstacles et difficultés

- Confusion entre le volume d'un objet et sa masse : les élèves pensent que plus un objet est gros, plus il pèse lourd.

Mettre en place des activités où les élèves auront à comparer les masses de plusieurs objets différents en volumes.

Activité : Peser un petit morceau de métal lourd (vis ou clou), un verre en plastique, un paquet de coton. Les élèves commencent par estimer leurs masses respectives avant de les peser réellement. Ils associent souvent masse et volume. Cette activité leur permet de faire évoluer leurs représentations et de séparer les 2 grandeurs (volume et masse).

- Les élèves ont peu de notions de mesures de capacités ou de masse. Ils ne savent pas estimer en utilisant la bonne unité le poids d'un grain de riz ou d'un morceau de sucre. Ils n'évaluent pas la quantité que représente un dl ou 10 litres d'eau.

Chaque activité de mesurage est précédée d'une estimation.

Activité : Dans le cas du riz ou du sucre, on fera procéder à une pesée de plusieurs unités ensemble puis à la division. De plus, l'enseignant donnera des repères en faisant trouver des capacités ou des masses d'objets courants (un verre d'eau, une banane, une petite bouteille).

5- Activités en classe

ACTIVITE 27 : MESURER LA CAPACITE

2ème AF

SEANCE 1

Objectifs : Evaluer et mesurer la capacité d'un récipient en prenant pour unité la capacité d'un autre récipient.

Evaluer et mesurer la capacité d'un récipient en prenant pour unité le gallon.

Comparer deux capacités

Objectif de la séance : Comparer directement deux capacités par transvasement.

Organisation de la classe : groupes de 5-6 élèves

Matériel : Pour chaque groupe :

- ♦ une grande bouteille en plastique pleine d'eau,
- ♦ un pot vide,
- ♦ deux récipients vides : un bol et un gobelet en plastique plus haut que le bol,
- ♦ un marqueur, un feutre ou une craie
- ♦ un seau (boquite)

Introduction de l'activité : En montrant chacun des récipients, l'enseignant dit : *Vous avez quatre récipients sur votre table : une bouteille pleine d'eau, un pot et deux autres récipients*

vides

En continuant de montrer les deux derniers récipients, il demande : *Quel récipient peut contenir le plus d'eau ? Comment peut-on en être sûr ?*

Consigne : 1- Désignez un rapporteur dans votre groupe.

2- Dites quel récipient peut contenir le plus d'eau. Vous viendrez ensuite expliquer comment vous avez fait.

Activité : Les élèves pourront proposer différents moyens :

Remplir un des récipients à comparer puis le vider dans le pot en repérant (en marquant) la hauteur atteinte. Puis vider le pot et recommencer avec l'autre récipient.

Transvaser d'un récipient dans l'autre pour voir lequel a la plus grande capacité.

Le maître passe dans les groupes pour les encourager et leur demander ce qu'ils font sans les aider.

Mise en commun : L'enseignant pose des questions qui permettront d'arriver à la synthèse. Pendant que les rapporteurs présentent leurs activités, il demande : Qu'est-ce que vous avez vu ? Qu'est-ce qu'on peut dire alors ? Le maître interroge un rapporteur par groupe qui va expliquer comment son groupe a procédé. Le maître aide à synthétiser (il fait remarquer les réponses qui se ressemblent et écrit les nouvelles réponses sur le tableau)

Que faire si des élèves proposent une méthode qui ne permet pas de prouver la différence de capacité ? (par exemple remplir les deux récipients et les vider ensemble dans le pot)

L'enseignant pose des questions au groupe qui a réalisé cette méthode pour que les élèves se rendent compte qu'avec cette méthode, on ne peut pas conclure. Il demande : L'eau des 2 récipients est mélangée dans le pot, peut-on savoir lequel contient le plus ?

Pour terminer la mise en commun : L'enseignant interrogera en dernier 2 groupes qui ont réussi chacun une des deux expériences. Un élève de chaque groupe viendra la montrer à ses camarades. Si une expérience n'a pas été trouvée par les élèves l'enseignant la réalisera lui-même.

Synthèse : Quand on verse de l'eau d'un récipient dans un autre, la quantité d'eau ne change pas. Suivant la forme du récipient, la hauteur peut être très différente. Ce n'est pas toujours le récipient le plus haut qui contient le plus d'eau. On peut vider un récipient dans un autre pour savoir quel récipient peut contenir le plus.

Trace écrite : Les élèves dessinent l'expérience. Le but de cette trace est de les aider à fixer, à mémoriser ce qui a été fait. Ils dessinent les deux récipients. Ils peuvent dessiner :

- ♦ le récipient A (de plus petite capacité) qui est vidé dans le récipient B (le récipient B n'est pas rempli)
- ♦ ou le récipient B (de plus grande capacité)qui ne peut pas être vidé entièrement dans le récipient B. Le récipient A est rempli et il reste de l'eau dans le récipient B.

Quel récipient peut contenir le plus ?

SEANCE 2

Objectif de la séance : Utiliser une mesure commune

Organisation de la classe : groupes de 5 ou 6 élèves

Matériel : Pour chaque groupe:

- ♦ une bouteille en plastique pleine d'eau,
- ♦ un verre en plastique,
- ♦ 4 récipients de taille et contenances différentes.

Introduction de la séance : La dernière fois, nous avons comparé les contenances de 2 récipients. Cette fois-ci, nous allons ranger ces quatre récipients, de celui qui contient le moins à

celui qui contient le plus.

Consigne : Classez ces récipients de celui qui contient le moins à celui qui contient le plus. Pour cela, utilisez le gobelet. Vous viendrez ensuite expliquer comment vous avez fait.

Activité : Les élèves réalisent l'activité.

Difficultés à prévoir :

- ♦ Les élèves se servent du verre pour remplir le récipient mais ne comptent pas combien de fois ils ont rempli le verre donc ils ne peuvent pas mesurer.
- ♦ Les élèves remplissent et comptent les verres mais continuent aussi à verser directement de la bouteille : leur mesure est fautive.

Ces difficultés sont souvent repérées à l'intérieur même du groupe. Sinon, l'enseignant invite les élèves à reproduire l'activité et à discuter pourquoi ils ne trouvent pas la même mesure la 2ème fois. Il peut aussi faire échanger avec les autres groupes au moment de la mise en commun quand l'erreur apparaîtra.

Mise en commun : L'enseignant pose des questions qui permettront d'arriver à la synthèse. Pendant que les rapporteurs présentent leurs activités, il demande : qu'est-ce que vous avez vu ? Qu'est-ce qu'on peut dire alors ? Le maître interroge un rapporteur par groupe qui va expliquer et montrer comment son groupe a procédé.

Synthèse : Pour comparer les contenances de plusieurs récipients, il faut utiliser une mesure commune et voir combien de fois on l'utilise pour remplir le récipient.

Trace écrite : Les élèves dessinent l'expérience : ils dessinent chaque récipient avec en-dessous le nombre de gobelets correspondant. Il peut y avoir des demis ou des quarts de gobelets.

ACTIVITE 28: LE GALLON

Objectif de la séance : Evaluer et mesurer la capacité d'un récipient en prenant pour unité le gallon.

Organisation de la classe : classe entière puis groupes de 5-6 élèves.

Matériel : Par groupe de 5 ou 6 élèves: un gros seau contenant une quantité d'eau à mesurer, une cuvette pour vider, un gallon

Collectif : L'enseignant présente un gallon à la classe et interroge les élèves. Il demande : *Quel est cet objet ? A quoi sert-il ? Qu'est-ce qu'on peut mettre dedans ?*

Il explique : *La dernière fois, nous avons mesuré avec des gobelets. Aujourd'hui, nous allons mesurer avec le gallon. Ce gallon peut contenir de l'eau ou tout autre chose.*

Question - Consigne : *Quelle quantité d'eau y a-t-il dans le seau ? Combien de gallons ? Vous allez vous mettre d'accord dans le groupe sur une seule réponse.*

L'enseignant demande aux groupes de lever la main pour aller écrire leur réponse au tableau. Une fois, les réponses obtenues, il demande aux élèves de vérifier leur réponse en mesurant le seau en nombre de gallons. Le maître ne dit pas quelle est la bonne réponse.

Mise en commun : Puis il interroge chaque groupe sur le résultat de la mesure. Il écrit le résultat réel à côté de chaque estimation. En général, le résultat ne tombe pas juste. Il l'écrit sous la forme : « entre 2 et 3 gallons ».

Synthèse : Le maître interroge les élèves sur les différences entre leurs estimations et la réalité

qu'ils ont trouvée. Il fait reformuler le déroulement de l'expérience aux élèves. Il peut conclure en disant qu'il faut s'entraîner à savoir estimer une capacité mais, que pour être sûr, il faut vérifier par l'expérience.

Trace écrite : Le maître fait dessiner l'expérience et écrire les mots «un gallon» dans le cahier. Selon le niveau d'écriture des élèves, il peut faire écrire :

Nous avons pensé qu'il y avait ____ gallons d'eau dans le seau.

En réalité, il y avait entre ____ et ____ gallons d'eau.

Entraînements rapides dans les jours suivants : Le maître pose tous les matins à l'oral 2 questions sur les capacités, dont une question à vérifier.

Par exemple :

Combien de gallons d'eau contient le réservoir de l'école ? Les élèves font des estimations et l'enseignant (qui s'est renseigné avant) donne la réponse.

Combien d'eau contient ce récipient? Les élèves font des estimations et un élève vérifie . On peut proposer aussi des récipients qui contiennent moins d'un gallon ou juste un gallon.

EVALUATION :

A chaque séance, l'enseignant évaluera l'impact de son enseignement en observant les traces écrites des élèves et en étant attentif aux réponses et reformulations individuelles.

Après des séances d'entraînement, il effectue l'évaluation de la séquence.

3ème et 4ème AF

Evaluer et mesurer la capacité d'un récipient en litres et en gallons.

Evaluer et mesurer la capacité d'un gallon en litres.

Evaluer et mesurer la capacité d'un litre en décilitres.

Evaluer et mesurer la capacité d'un récipient en litres et décilitres.

ACTIVITE 29 : UTILISATION D'UNE MESURE COMMUNE - ESTIMATION

Objectif de la séance : Estimer la mesure d'une capacité. Vérifier cette estimation.

Organisation de la classe : par groupe de 5 ou 6 élèves.

Matériel : Pour chaque groupe :

- ♦ un petit gobelet en plastique,
- ♦ un grand gobelet en plastique,
- ♦ une grande bouteille en plastique pleine d'eau,
- ♦ une cuvette pour vider.

Introduction de l'activité : En montrant chacun des récipients, l'enseignant dit : Vous avez une bouteille pleine d'eau sur votre table et deux gobelets, un grand et un petit.

En continuant de montrer les deux gobelets, il demande : A votre avis, combien de fois utilise-t-on le grand gobelet pour vider la bouteille ? Et si on utilise le petit gobelet ?

Question - Consigne : Vous allez écrire sur un papier ce que vous pensez puis vous vérifierez.

Le maître écrit au tableau et fait écrire aux élèves :

Nous pensons qu'avec la bouteille, on peut remplir ____ petits gobelets ou bien ____ grands gobelets.

Il y a plus/ moins de petits gobelets que de grands gobelets.

Les élèves doivent se mettre d'accord dans le groupe sur une estimation avant d'écrire. Puis,

ils effectuent l'activité.

Réponses possibles des élèves :

Ils estiment un nombre de gobelets peu important.

Ils pensent qu'il y aura moins de petits gobelets que de grands verres.

Le maître ne dit pas quelle est la bonne réponse. Il encourage simplement à vérifier en faisant l'activité.

Les élèves prendront naturellement conscience des erreurs en effectuant les mesures.

Mise en commun : Un élève pour chaque groupe vient écrire les résultats du groupe au tableau sous cette forme :

Groupe 1 : 4 grands gobelets ou 8 petits gobelets

Groupe 2 : 5 grands gobelets ou 9 petits gobelets

Etc ...

Synthèse :

Le maître revient sur la question du début : Est-ce qu'on obtient un plus grand nombre en utilisant un petit gobelet ou un grand gobelet pour mesurer ?

Les élèves argumentent à partir des résultats. Ils constatent que le nombre de petits gobelets est à peu près le double du nombre de grands verres. (Cela dépend des gobelets utilisés et il y a des incertitudes dans les mesures.)

Comment peut-on vérifier cette proportion autrement ? Un élève peut proposer de remplir un grand verre avec le petit verre. Si cette proposition ne vient pas, c'est le maître qui proposera. On voit qu'il faut environ deux petits gobelets pour remplir le grand verre.

Trace écrite :

Pour mesurer la même quantité d'eau, on n'obtient pas la même mesure si on mesure avec un grand gobelet ou avec un petit gobelet. Si on utilise un petit gobelet, on obtient un plus grand nombre.

ACTIVITE 30 : LITRE ET GALLON

Objectif de la séance : Utiliser le litre et le gallon. Savoir le rapport entre le litre et le gallon.

Organisation de la classe : Par groupe de 5 ou 6 élèves

Matériel : Pour chaque groupe :

- ♦ récipient de 1 litre,
- ♦ un gallon,
- ♦ un seau rempli avec 2 ou 3 gallons d'eau,
- ♦ un seau ou une cuvette pour vider.

Rappel de la séance précédente : *La dernière fois, nous avons utilisé des gobelets différents pour mesurer la capacité de la bouteille. Nous avons vu que, si on n'utilise pas la même mesure, on n'obtient pas le même nombre.*

Voici les mesures que nous utilisons en Haïti. Voici un gallon, vous en avez utilisé en 2ème année. Voici un litre.

Consigne : *Vous allez chercher par groupes si on trouve un plus grand nombre en mesurant avec le litre ou avec le gallon.*

Puis, vous estimerez combien de litres d'eau il y a dans le seau et combien de gallons si on mesure avec le gallon.

*Un élève par groupe viendra écrire vos réponses au tableau.
Enfin, vous vérifierez pour avoir les mesures réelles.*

Le maître écrit au tableau et fait écrire aux élèves :

Nous pensons que, dans le seau, il y a ____ gallons ou bien ____ litres. Il y a plus/ moins de gallons que de litres.

Les élèves doivent se mettre d'accord dans le groupe sur une estimation avant d'écrire. Puis, ils effectuent l'activité. Généralement, les élèves voient le rapport avec l'activité de la séance d'avant et répondent plus facilement. Le maître ne dit pas quelle est la bonne réponse. Il encourage simplement à vérifier en faisant l'activité.

Mise en commun : Un élève pour chaque groupe vient écrire les résultats du groupe au tableau sous cette forme :

Groupe 1 : 3 gallons ou 11 litres

Groupe 2 : 2 gallons ou 8 litres

Synthèse :

Le maître revient sur la question du début : *Est-ce qu'on obtient un plus grand nombre en utilisant le gallon ou le litre pour mesurer ?* Les élèves argumentent à partir des résultats. Ils constatent que le nombre de litres est plus grand. *A votre avis, il y a combien de litres dans un gallon ?* Regardez les résultats que vous avez trouvés. Les élèves cherchent par groupe puis répondent. Ils peuvent constater qu'il y a, à peu près, 3 ou 4 fois plus de litres que de gallons.

Nous allons vérifier.

Un élève se sert du litre pour mesurer la capacité du gallon. Les élèves constatent que le gallon contient plus de 3 litres et moins de 4 litres.

Trace écrite :

Pour la même quantité d'eau, on n'obtient pas le même nombre si on mesure avec des gallons ou avec des litres. Si on mesure avec des litres, on obtient un plus grand nombre. $3 \text{ litres} < 1 \text{ gallon} < 4 \text{ litres}$

ACTIVITE 31: LE DECILITRE, ESTIMATION ET CONVERSION

Le décilitre, estimation et conversion

Objectif de la séance : Evaluer et mesurer la capacité d'un litre en décilitres.

Organisation de la classe : par groupes de 5 ou 6 élèves

Matériel : Pour chaque groupe :

- ♦ 1 bouteille de 1 litre remplie d'eau,
- ♦ 10 gobelets,
- ♦ 1 feutre

Introduction de la séance : Vous avez utilisé le litre pour mesurer. Vous allez maintenant partager le litre. Vous avez une bouteille qui contient un litre d'eau et 10 gobelets.

Consigne : *Vous placez les dix verres côte à côte et vous partagez l'eau. Il faut exactement la même quantité d'eau dans chaque verre. Quand vous avez la même quantité d'eau dans tous les verres, vous marquez le niveau de l'eau avec un trait au feutre à l'extérieur. Vous faites cela*

pour un seul verre.

Les élèves effectuent l'activité. S'ils n'y a pas assez de verres, les élèves peuvent se les prêter mais il faut que chaque groupe puisse faire le partage en 10 verres et écrire la marque sur un verre. A la fin de l'activité, chaque groupe a un verre marqué.

Le maître dit : *Chaque groupe a un verre marqué. La quantité d'eau qu'on peut mettre jusqu'à la marque s'appelle un décilitre d'eau.*

Combien de décilitres y a-t-il dans un litre ? Pourquoi ?

Les élèves peuvent dire par exemple : il y en a 10 parce qu'on a partagé en 10, tous les verres avaient la même quantité d'eau. Le maître ne dit pas si la réponse est juste ou fausse mais demande des explications.

Certains peuvent donner une autre réponse, par exemple 8 décilitres. Ils ont fait une estimation comme dans la séance précédente. Le maître ne corrige pas leur erreur par des paroles mais demande : Comment peut-on vérifier ?

Les élèves peuvent proposer de remplir le verre marqué (le décilitre) avec l'eau de la bouteille d'un litre, de le vider et de voir combien de fois il faut le remplir de nouveau pour vider la bouteille. L'enseignant demande alors à chaque groupe de refaire cette activité en utilisant son verre marqué.

Synthèse – Trace écrite :

Avec un litre, je peux remplir dix décilitres. Dans un litre, il y a 10 décilitres. 10 décilitres = 1 litre. Le maître écrit la trace écrite au tableau.

Entraînements dans les jours suivants : Le maître demande tous les matins à l'oral 3 questions sur les capacités.

Par exemple : Pour remplir le bol, j'utilise 2 fois la tasse. Combien de fois j'utilise la tasse pour remplir 3 bols ? Si j'ai un bidon de 5l, est-ce que je peux remplir deux bidons d'un gallon ? 2 litres et 8 décilitres, est-ce que c'est plus ou moins que 3 litres ?

EVALUATION :

A chaque séance, l'enseignant évaluera l'impact de son enseignement en observant les traces écrites des élèves et en étant attentif aux réponses et reformulations individuelles.

Après des séances d'entraînement, il effectue l'évaluation de la séquence.

EVALUATION DE SEQUENCE (avec les ardoises):

Choix entre 3 réponses : Ce récipient (l'enseignant le présente) a une capacité proche de 1 litre, 1 gallon, 3 gallons. (Le maître a vérifié lui-même la capacité du récipient). 4 gallons, est-ce que c'est moins que 20 litres ? 4 litres, est-ce que c'est plus que 1 gallon ?

Si j'ai 35 décilitres, combien je peux remplir de bouteilles de 1 litre ? Est-ce qu'il me reste de l'eau ?

D – HEURES ET DUREE

1- Mise en situation des étudiants-maîtres

Par groupes, les étudiants-maîtres résolvent le problème suivant : Peut-on vivre un million de jours ? Et un million d'heures ?

2- Structuration par le formateur

Ce problème fait appel aux mesures de durée qui ne sont pas organisées de façon décimale (par multiples de 10). Il existe plusieurs façons de le résoudre. La façon experte fait appel à la conversion des heures en jours puis en années puis à comparer la durée obtenue avec la durée possible de la vie humaine.

= 2739 Un million de jours est donc égal à 2739 années. C'est donc impossible

= 41666 Un million d'heures est égal à 41666 jours soit 114 années. Cela reste assez improbable bien que certains y soient arrivés.

On peut évidemment résoudre ce problème de façon moins experte mais tout aussi efficace en faisant le raisonnement que si l'on vit 100 ans :

- ♦ on vit donc 36500 jours ce qui est très loin d'un million de jours,
- ♦ on vit $36500 \times 24 = 876\,000$ heures ce qui n'atteint pas le million mais s'en rapproche.

La difficulté (et l'intérêt) de ce problème vient de ce que la réponse ne saute pas aux yeux. Elle nécessite un calcul. Nous n'avons pas une idée très nette de ce que représente un million de jours. En effet, les durées sont ressenties de façon subjective (on peut ressentir une année comme très courte ou très longue). De plus, elles ne se convertissent pas comme les autres grandeurs .

3 - Apports

Qu'est ce que le temps ? Après avoir suscité un débat autour de cette question dans la classe divisée en groupes, le formateur fait ressortir la complexité du concept « temps ».

Donner une définition du temps s'avère être une chose bien difficile à faire tant que ce concept désigne dans le langage courant des notions très différentes les unes des autres (le temps qui passe, le temps de la montre, le temps d'attente...). De plus ce concept ne s'appréhende que dans l'instant, dans la mesure où il ne correspond à rien de matériel. Pour prendre conscience du temps, il faut se souvenir ou anticiper. Si le présent est accessible, le passé doit être remémoré et reconstruit et l'avenir anticipé. Face à cette complexité, on est donc amené à des apprentissages bien particuliers à savoir :

- ♦ L'antériorité ;
- ♦ la simultanéité ;
- ♦ la postériorité ;
- ♦ la durée.

Dans le temps, nous avons :

- Le temps social qui englobe les calendriers, la datation, le temps historique etc.
- Le temps astronomique qui concerne le repérage de l'alternance jour/nuit, l'observation de la position du soleil dans le ciel etc.

Tandis que dans la durée, nous avons l'année, le mois, la semaine, le jour, l'heure, la minute et la seconde.

Les opérations sur les durées nécessitent la connaissance des égalités suivantes :

Addition des durées

Consigne : Effectuer $13\text{ h } 43\text{ min } 54\text{ s} + 11\text{ h } 55\text{ min } 47\text{ s}$

En effectuant $54\text{ s} + 47\text{ s}$, on trouve 101 s , on en extrait 1 min que l'on ajoute aux minutes, il en reste après extraction de cette minute 41 s .

On a d'autre part $43 \text{ min} + 55 \text{ min} + 1 \text{ min} = 99 \text{ min}$,
on en extrait une heure que l'on ajoute aux heures. Il en
reste 39 min.

On a enfin $13\text{ h} + 11\text{ h} + 1\text{ h} = 25\text{ h}$, on en extrait 1 jour (qui correspond à 24 h), il en reste 1 h. D'où le résultat : $13\text{ h } 43\text{ min } 54\text{ s} + 11\text{ h } 55\text{ min } 47\text{ s} = 1\text{ j } 1\text{ h } 39\text{ min } 41\text{ s}$.

Remarque : On opère toujours de la droite vers la gauche.

+	1 1 h	5 5 min	4 7 s
	2 4 h	9 8 min	1 0 1 s
		+ 1 min	4 1 s
		= 9 9 min	
	+ 1 h	3 9 min	
	= 2 5 h		
1 j	1 h		

Consigne : Jean part à pied pour l'école à 6h 22 min. Il doit marcher pendant 40 min pour y être arrivé. A quelle heure arrivera-t-il à l'école ?

Activité

Consigne : Effectuer 17 h 23 min 16 s – 13 h 40 min 53 s.

Posons l'opération :

	17 h	23 min	16 s
-	13 h	40 min	53 s
	impossible		

Cette opération est impossible car on ne peut pas soustraire 53 s dans 15 s. Pour remédier à cette situation, on enlève une minute des 23 min et on la convertit en secondes. On obtient alors :

$$17\text{ h} \quad 22\text{ min} \quad 76\text{ s}$$

17 h	22 min	76 s
- 13 h	40 mn	53 s
impossible		

Encore une fois, c'est impossible car on ne peut pas soustraire 40 min dans 22 min. Pour remédier à cette situation, on enlève une heure des 17 heures que l'on convertit en minutes. D'où la soustraction :

$$\begin{array}{r} 16\text{ h} \quad 82\text{ min} \quad 76\text{ s} \\ - 13\text{ h} \quad 40\text{ min} \quad 53\text{ s} \\ \hline 03\text{ h} \quad 42\text{ min} \quad 23\text{ s} \end{array}$$

D'où le résultat :

$$17 \text{ h } 23 \text{ min } 16 \text{ s} - 13 \text{ h } 40 \text{ min } 53 \text{ s} = 3 \text{ h } 42 \text{ min } 23 \text{ s}.$$

Activité

Consigne : Une cérémonie religieuse a commencé à 3 h 23 min, elle se termine à 5 h 12 min. Quelle était la durée de cette cérémonie ?

Multiplication par un entier

Activité - Consigne : Effectuer $8 \text{ h } 24 \text{ min } 35 \text{ s} \times 7$

Posons l'opération :

On procède comme s'il s'agissait de trois nombres juxtaposés à multiplier par 7. On commence à effectuer de la droite vers la gauche et l'on procède comme dans le cas de l'addition pour les extractions successives. On obtient donc comme résultat : $8 \text{ h } 24 \text{ min } 35 \text{ s} \times 7 = 2 \text{ j } 10 \text{ h } 52 \text{ min } 5 \text{ s}$.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 8 \text{ h} \quad 24 \text{ min} \quad 35 \text{ s} \\
 \times \qquad \qquad \qquad 7 \\
 \hline
 56 \text{ h} \quad 168 \text{ min} \quad 245 \text{ s} \\
 + \quad 4 \text{ min} \quad 5 \text{ s} \\
 \hline
 172 \text{ mn} \\
 + 2 \text{ h} \quad 52 \text{ min} \\
 \hline
 = 58 \text{ h} \\
 \hline
 2 \text{ j } 10 \text{ h}
 \end{array}
 \end{array}$$

Activité

Consigne : Un robinet R peut remplir un bassin en 8 h, une bouche d'évacuation B peut le vider en 6 h. Le bassin étant rempli, on ouvre en même temps le robinet et la bouche d'évacuation. Le bassin sera-t-il vidé ? Si oui, en combien de temps ?

Division par un nombre entier.

Activité

Consigne : Effectuer $17 \text{ h } 42 \text{ min } 35 \text{ s} : 7$

Posons l'opération :

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 17 \text{ h} \qquad \qquad \qquad 42 \text{ mn} \qquad \qquad \qquad 35 \text{ s} \\
 -14 \text{ h} \qquad \qquad \qquad +180 \text{ mn} \qquad \qquad \qquad +300 \text{ s} \\
 \hline
 03 \text{ h} \times 60 = 180 \text{ mn} \quad 222 \text{ mn} \qquad \qquad \qquad 335 \text{ s} \\
 \qquad \qquad \qquad -21 \text{ mn} \qquad \qquad \qquad -28 \text{ s} \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad 012 \text{ mn} \qquad \qquad \qquad 055 \text{ s} \\
 \qquad \qquad \qquad - \quad 7 \text{ mn} \qquad \qquad \qquad -49 \text{ s} \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad 005 \text{ mn} \times 60 = 300 \text{ s} \quad \text{---} 06 \text{ s}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 7 \\
 \hline
 2 \text{ h } 31 \text{ mn } 47 \text{ s}
 \end{array}$$

Contrairement aux autres opérations, dans la division on opère de la gauche vers la droite. On divise d'abord 17 h par 7 comme s'il s'agissait d'une division ordinaire et le reste est converti en minutes pour être rajouté aux minutes initialement données ; ce qui donne $180 \text{ mn} + 42 \text{ mn} = 222 \text{ mn}$ que l'on divise alors par 7. On obtient un quotient de 31 mn et un reste de 5 mn que l'on converties en secondes en les multipliant par 60. On ajoute les 300 s obtenues aux 35 s initialement données. On a finalement à diviser 335 s par 7, ce qui donne un quotient de 47 s.

E- AIRES ET VOLUMES

1- Mise en situation des étudiants-maîtres (Travail de groupes)

Situation 1 : Des surfaces différentes et non superposables sont présentées aux étudiants-maîtres. Ranger ces différentes surfaces de la plus petite à la plus grande aire. Vous disposez de ciseaux.

Puis expliquez au grand groupe vos résultats et comment vous avez procédé.

Situation 2 : Vous disposez de papier quadrillé. Tracer le plus de figures différentes possibles dont l'aire sera de 2 carreaux.

Situation 3 : Calculer l'aire de la figure en bleu. (les trois de figures de base sont un rectangle, un carré, un triangle rectangle. $AC = 9\text{m}$, $CD = 21\text{m}$, $AB = 32\text{m}$, $CE = 7\text{m}$)



2 – Structuration par le formateur

Les comparaisons feront appel aux comparaisons directes et indirectes .

Comparaison directe : recouvrir les figures l'une par l'autre. Si les figures ne peuvent se recouvrir, on peut recomposer les aires en découpant ; cela met en évidence que les aires peuvent s'additionner entre elles. On peut aussi dessiner des aires inférieures en faisant appel à cette propriété.

Utilisation du quadrillage : recombinaison des divers quadrillages : fraction d'unité-étalon. Le quadrillage est une bonne représentation de l'unité-étalon. Le formateur doit pourtant faire parfois remarquer que cette unité-étalon (le carreau) peut être fractionnée en traçant les médianes des côtés ou les diagonales.

Le pavage du plan (quadrillage ou utilisation d'une autre forme d'unité) est le seul moyen réel de mesurer une aire. En effet, il n'existe pas d'instrument de mesure d'aire.

Dans la situation 3, on ne mesure plus l'aire mais on la calcule en faisant appel à des décompositions recompositions d'aires connues.

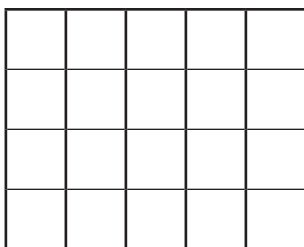
On peut travailler ces compétences en réutilisant la situation du tangram présentée en géométrie : chaque aire est une fraction de la grande aire.

3 – Apports

L'aire est une grandeur plus difficile à appréhender que la longueur. En effet, il est parfois difficile de la comparer en comparaison directe puisque les surfaces ne sont pas toujours superposables. Dans ce cas, il faut découper et recomposer. Quand on ne peut découper les figures, on fait ce découpage mentalement ou en dessinant et en reportant sur une des figures.

La mesure de l'aire est difficile car il n'existe aucun instrument de mesure. **On pave la figure** avec une **unité de référence**. Dans le cas d'une unité du SI, on peut aussi paver le plan. Cependant, la méthode experte pour déterminer une aire est de la calculer à partir des dimensions de la figure.

Ce calcul est fait tout d'abord à partir de pavages. Le rectangle est la figure la plus aisée à paver en



cm^2 , en particulier quand les longueurs sont des nombres entiers de cm . En comptant les cm^2 , on constate qu'on obtient 20 cm^2 . On peut aussi effectuer des multiplications. C'est même ainsi qu'on a introduit la situation de multiplication.

Activité (5ème et 6ème AF) :

Quelles peuvent être les dimensions d'un rectangle de 20cm^2 ? Les élèves cherchent toutes les réponses possibles avec des nombres entiers. 1×20 , 2×10 , 5×4 . Si on a des longueurs non entières, le nombre de réponses est infini ; on peut utiliser des situations-problèmes pour la multiplication en changeant la consigne.

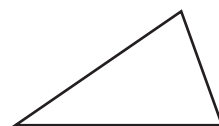
Conclusion (à établir avec les élèves) : *L'aire est le produit de 2 longueurs. Pour le rectangle, on dit Longueur $\times$ largeur.*

Aires des figures connues :

Elles sont retrouvées à partir de l'aire du rectangle par décomposition et recombinaison.

Activité de classe (et/ou de formation) : comment retrouver l'aire de chaque figure. En 5ème AF, on retrouvera ces aires par découpage. En 6ème AF, on retrouvera ces aires par dessin et on les calculera. On retrouvera ainsi la formule de calcul pour chaque figure.

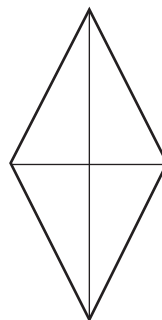
Triangle : L'aire d'un triangle est toujours la moitié de l'aire d'un rectangle dont la longueur serait un côté du triangle et la largeur serait la hauteur du triangle.



Parallélogramme : L'aire du parallélogramme est égale à l'aire d'un rectangle par découpage et déplacement d'un triangle.



Losange : L'aire d'un losange est égale à l'aire d'un rectangle par découpage et déplacement des triangles.



rectangle par découpage

Le volume : Le volume est une grandeur qui provient de 3 dimensions. L'étude du volume se fait en 6ème année. On peut relier cette étude à celle de la capacité qui a été précédemment abordée.

En 6ème année, les élèves travaillent à partir d'unités non conventionnelles par exemple un cube d'unité u . On cherchera à déterminer dans un assemblage de cubes le nombre de cubes-unités.

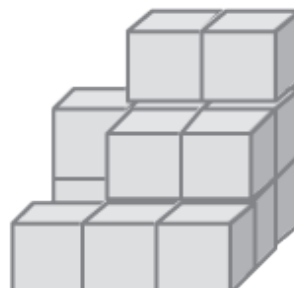
Il n'existe pas d'instrument de mesure de volume. Le seul moyen de mesurer le volume d'un objet serait de le plonger dans l'eau et de mesurer la quantité d'eau déplacée. (relation avec la capacité)

On calcule le volume à partir des 3 dimensions d'un objet. Les calculs de volumes de solides connus se rapportent au calcul de volume du parallélépipède. Le travail à partir de cubes-unités permet de retrouver la formule de calcul du volume d'un parallélépipède.

Activité (6ème AF) :

Une boîte contient des cubes empilés sur 3 étages. Chaque étage a 8 cubes sur la longueur et 6 cubes sur la largeur. Combien y a-t-il de cubes dans la boîte ?

Activité (6ème AF) : Combien y a-t-il de cubes ?



4) Quels obstacles ? Quelles difficultés ?

- La grandeur « aire » est confondue avec la longueur. Présenter et faire des exercices sur des figures très « allongées » mais de plus petite aire que des figures plus « courtes » et plus larges.

- ♦ Le périmètre d'une figure est confondu avec son aire ;

Proposer des activités sur les aires et périmètres où il faut :

- ***construire sur papier quadrillé le plus possible de figures avec une aire don***

née

Variables :

- * les segments des polygones doivent ou non suivre les lignes du quadrillage ;
- * les polygones sont imposés ou non (triangles, carrés, rectangles, autres polygones réguliers ou non) ;
- * le papier n'est pas quadrillé.
- ***construire sur papier quadrillé le plus possibles de figures différentes avec un périmètre donné, calculer l'aire de chacune de ces figures.***

On peut utiliser les mêmes variables.

- ♦ Les élèves ont du mal à faire les conversions entre les unités d'aire. Ils ne comprennent qu'on transforme 1dm^2 en 100cm^2 et non en 10cm^2 .

Faire réaliser par chaque élève un quadrillage en cm^2 sur un carton de 1 dm^2 . On gradue chaque côté et on joint de part en part. Faire réaliser au crayon très fin un quadrillage analogue en mm^2 pour un des cm^2 . Demander aux élèves combien ils obtiendraient de tout petits carreaux de 1 mm^2 s'ils faisaient le travail sur le dm^2 entier. Faire échanger et argumenter les élèves sur les nombre de cm^2 dans un dm^2 et de mm^2 dans un cm^2 . On arrive à l'égalité suivante : $1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2 = 10\,000 \text{ mm}^2$ (on multiplie par 100 à chaque fois)

- Poser la question : dans un m^2 , combien y a-t-il de cm^2 , et de mm^2 ?
Réaliser collectivement un carré de 1m de côté qui sera affiché et partagé en dm^2 . Un des dm^2 sera partagé en cm^2 , un des cm^2 sera partagé en mm^2 .
- Les obstacles existants pour les aires se retrouvent dans les calculs de volume.
Prendre de l'argile et par groupe confectionner une plaque carrée de 1cm d'épaisseur et 1dm de côté. Graduer cette plaque en cm^2 . La plaque a donc 100 cm^2 sur la surface et 1 cm d'épaisseur. Elle a donc un volume de 100
Si on rassemble 10 de ces plaques, on obtient un cube de 10 cm de côté qui aura un volume de 1000 .
- Les élèves confondent les mesures de capacités et celles de volumes. Il identifient le litre au m^3 et non au dm^3 .

Fabriquer une boîte en carton de 1dm d'arête. Remplir des bouteilles de 0,5l de sable. Estimer combien de ces bouteilles remplies de sable seront nécessaires pour emplir la boîte.

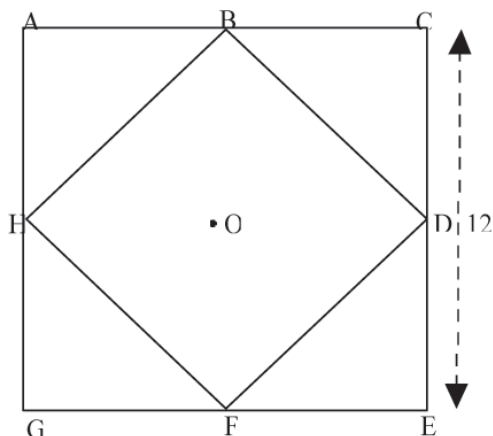
5) Activités de classe

Activité 1

Consigne

- ♦ Considérons la figure :
- ♦ ACEG est un carré. B, d, f et h sont les milieux respectivement de [AC], [CE], [EG], [GA].
- ♦ Calculer l'aire de la figure HBDF ;
- ♦ On a agrandi la figure. [HB] qui mesurait 8,5 cm mesure maintenant 11 cm. Quelle est la mesure de [AC] ?

Vérifier en dessinant la figure.



- ♦ On peut imaginer que l'on plie les triangles AHB, BCD, DEF et FGH de façon à ce que les sommets A, C, E et G se superposent avec le point O.
- ♦ Se demander quelle fraction du carré ACEG représente le carré HBDF.

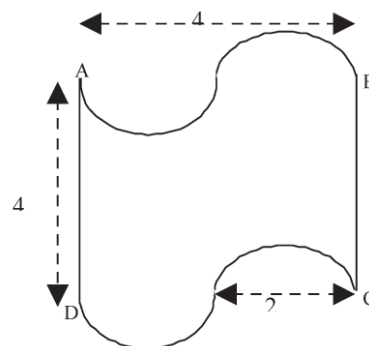
Mais on peut aussi calculer :

- ♦ L'aire du carré ACEG;
- ♦ l'aire d'un triangle puis l'aire des quatre triangles AHB, BCD, DEF et FGH.

Activité 2

Consigne : Observe bien la figure suivante :

- 1) Calculer son périmètre.
- 2) Pour calculer son aire, a-t-on besoin de savoir l'aire du disque ?
- 3) Calculer son aire.



Activité 3 : Le papa de Jean, Monsieur Paul, arrive à la maison avec un avocat et une boîte de bonbons. Il les dépose sur la table. Ces deux objets occupent chacun un certain espace dans la salle.

- ♦ L'espace occupé par l'avocat est le volume de l'avocat.
- ♦ L'espace occupé par la boîte est le volume de la boîte.

Sur la boîte, on peut prendre trois mesures différentes :

Elle a donc trois caractéristiques particulières : Une longueur (L), une largeur (l) et une hauteur (h). On dit qu'elle a trois dimensions.

L'avocat a aussi les mêmes caractéristiques mais de façon moins évidente. (

- ♦ Tout corps occupant un espace, et qui par conséquent a un volume, a alors trois dimensions.
- ♦ Plus les dimensions d'un corps sont grandes, plus son volume est grand.

Suivant le contexte, pour désigner les dimensions, on utilisera trois parmi ces termes : Longueur, largeur, épaisseur, hauteur ou profondeur.

Exemples :

- ♦ Une piscine a une longueur, une largeur et une profondeur.
- ♦ Une lame de vitre a une longueur, une largeur et une épaisseur.
- ♦ Un bureau a une longueur une largeur et une hauteur.

Remarque : L'étudiant-maître peut remplacer ces exemples par d'autres jugés beaucoup plus familiers à ses élèves.

Conclusion : Le volume d'un corps, c'est l'espace qu'occupe ce corps.

Activité

Matériels : objets locaux et accessibles

Consigne : Comparaison de volume.

Le formateur peut apporter ou demander à quelques étudiants d'apporter quelques objets, des cailloux par exemple. Ensuite, de les arranger dans l'ordre croissant par rapport à leurs volumes.

L'unité principale des mesures de volume est le mètre cube (m^3). C'est le volume d'un cube de 1m d'arête. Les sous-multiples du mètre cube sont :

- ♦ le décimètre cube (dm^3) ;
- ♦ le centimètre cube (cm^3) ;
- ♦ le millimètre cube (mm^3).

Un mètre cube = 1000 décimètres cubes.

Un décimètre cube = 1000 centimètres cubes.

Un centimètre cube = 1000 millimètres cubes.

Remarque : Le mètre cube n'a pas de multiples.

Activité

Consigne : Observer bien le cube suivant. Il a une arête de 3cm.

- ♦ Quel est son volume ?
- ♦ On dispose de 8 cubes identiques. Peut-on, sans les déformer les associer pour obtenir un cube ?
- ♦ En les associant, on obtient un solide. Quel est son volume ?

Capacité

Lorsqu'il s'agit de mesurer la contenance d'un récipient, on utilise le terme de capacité au lieu de volume. La capacité s'exprime en litre (l). La capacité d'un récipient est égale au volume du corps liquide, gazeux, en poudre ou en grain qu'il peut contenir. Quand un objet peut contenir un autre corps, c'est alors un récipient et donc en plus de son volume, on dit qu'il a une capacité.

Exemple : Un pot en forme de cylindre occupe un espace, donc il a un volume. Comme il peut contenir de l'eau, par exemple donc il a une capacité. Cette capacité correspond au volume d'eau qu'il faut pour le remplir.

Activité

Consigne : Classer les objets suivants par rapport à leurs capacités



Dans la pratique, on utilise aussi les sous-multiples du litre : le décilitre (dl), le centilitre (cl) et le millilitre (ml). On a donc le tableau suivant :

Multiples		unité	Sous-multiples		
hl	dal	l	dl	cl	ml
		1	0	0	0
		0,	0	1	

On peut donc conclure qu'un litre est égal à 1000 millilitres, un centilitre est égal à 0.01 litre. En Haïti, on utilise aussi certaines unités dites locales : La petite marmite, la grosse marmite, le baril, etc.

Correspondance entre les unités de volume et de capacité.

Un litre rempli exactement un cube de 1dm d'arête soit 1 dm³. D'où la correspondance : 1dm³=1l.

Activité

Consigne : On veut mettre en bouteilles 1m³ de clairin. On remplit pour cela 1200 bouteilles de 75 cl chacune.

1. Quelle quantité de clairin reste-t-il ?
2. Combien de bouteilles de 0.5l faut-il prévoir pour soutirer le reste du clairin ?

Mise en œuvre

On doit convertir le m³ de clairin en litres. Comme on a déjà rempli 1200 bouteilles de 75 cl, il est important de chercher la capacité de ces 1200 bouteilles en litres. On pourra ainsi déterminer le reste grâce à une simple soustraction. Le reste étant exprimé en litres, le nombre de bouteilles de 0,5l se détermine très facilement grâce à une division.

Activité

Consigne : L'intérieur d'un bassin a la forme d'un parallélépipède rectangle de 3 m de long, 2 m de large et de 2,5 m de profondeur. Exprimer en hl la capacité de ce bassin. S'il est rempli d'eau, combien de gallons aura-t-on besoin pour tirer la totalité de l'eau sachant qu'un gallon a une capacité de 3,78 l ?

6) Activité de réinvestissement-évaluation

Aire du disque et volume du cylindre

- ♦ Mettre en place une progression pour s'approcher de la formule de l'aire du disque à partir du rayon. (il ne s'agira pas que leurs élèves trouvent la formule exacte mais qu'ils puissent donner un ordre de grandeur en connaissant le rayon d'un cercle, la valeur exacte de pi sera donnée à la fin par le maître) Pour construire ces séances, les étudiants-maîtres disposeront de papier quadrillé et de compas. Ils détailleront les situations et les variables de chaque séance ainsi que le matériel.
- ♦ Mettre en place une séance pour retrouver la formule du volume du cylindre en connaissant l'aire du disque. Ils pourront s'inspirer du travail fait sur le parallélépipède et utiliser le rapport entre les capacités et les volumes.
- ♦ Rédiger des exercices d'application pour les élèves sur aires et volumes.

5- ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE DE LA RESOLUTION DE PROBLEMES

Objectifs de formation :

Dans cette partie, les élèves-maîtres vont définir ce qu'est un problème et comment les utiliser dans la progression de mathématiques. Pour dégager de nouvelles notions ou exercer les connaissances existantes. Ils vont répartir les problèmes en catégories suivant les opérations mathématiques qu'ils mettent en jeu.

Ils vont comprendre quelles sont les difficultés que rencontrent les élèves dans la résolution de problèmes et comment ils mettent en place des stratégies pour les résoudre. Ils feront la distinction entre solutions personnelles et solutions expertes et apprendront à mettre en place les conditions pour que les élèves passent des unes aux autres.

Notions : problème de recherche, problème d'application, problèmes additifs, problèmes multiplicatifs, représentation du problème, stratégie de résolution, solution personnelle, solution experte.

A – DEFINITION DES PROBLEMES - TYPOLOGIE

1 – Mise en situation des élèves-maîtres

- **Situation 1** : A partir de l'égalité $25 - 12 = 13$, écrivez trois problèmes différents faisant intervenir deux de ces nombres, le troisième étant à chercher.

Attention : Les trois problèmes doivent correspondre à trois situations mathématiques différentes et ne pas seulement être un « habillage » différent de la même situation.

Le formateur ne donnera pas d'exemple pour cette dernière consigne, il renverra seulement aux différents sens de l'addition et de la soustraction étudiés dans la partie « Activités numériques ».

- **Situation 2** : Même consigne à partir de l'égalité $55 : 5 = 11$

2- Structuration par le formateur

- Certains types de problèmes apparaissent avec une plus grande fréquence.
 - ♦ Paul a 25 G, il en dépense 12. Combien en reste-t-il ?
 - ♦ Mona a 25 œufs, elle en vend 12. Combien en reste-t-il ?
 - ♦ Le maître a une réserve de 25 cahiers, il en distribue 12. Quelle est sa réserve maintenant ?
- Ces 3 problèmes correspondent au même sens de la soustraction : une diminution par rapport à un nombre initial.
- ♦ Le directeur de l'école a 100 crayons, il les partage équitablement entre 5 classes. Combien chaque classe recevra-t-elle de crayons ?
 - ♦ Grand-mère a fait 55 gâteaux pour ses 5 enfants. Combien donne-t-elle de gâteaux à chaque enfant ?
 - ♦ J'ai acheté 5 paquets de riz pour 55 G. Quel est le prix d'un paquet de riz ?

Ces 3 problèmes correspondent au même sens de la division: un partage équitable.

Quand on demande de rédiger un problème, ce sont ces types de problèmes qui apparaissent les premiers. Le formateur pourra faire remarquer que ces problèmes correspondent à la représentation courante de la division et de la soustraction. Le rôle de l'enseignement sera d'élargir cette représentation.

- Certains participants ont pu proposer d'autres problèmes correspondant à d'autres sens de la soustraction et de la multiplication. Le formateur organisera ces différentes propositions de façon à faire ressortir les différents types à travers les exemples proposés. Si il n'y a pas d'exemple pour une des catégories, le formateur en proposera lui-même.

Soustraction :

- ♦ Paul a 25 G, il en dépense 12. Combien en reste-t-il ? **Diminution par rapport à un nombre initial**
- ♦ Dans la classe, il y a 25 élèves. Il y a 12 garçons. Combien y a-t-il de filles ? **Problème tout-partie**
- ♦ Jacques a 25 G, Pierre a 12 G. Combien Jacques a-t-il de plus par que Pierre ? **Comparaison**

Division :

- ♦ Le directeur de l'école a 55 crayons, il les partage équitablement entre 5 classes. Combien chaque classe recevra-t-elle de crayons ? **Division-partition** (on cherche la taille d'une part)
- ♦ Un fabricant de bonbons a fait 55 bonbons. Il fait des lots de 5 bonbons. Combien peut-il faire de lots? **Division-quotition** (on cherche le nombre de parts)
- ♦ Helena a 55 ans, sa petite-fille est 5 fois moins âgée. Quel est l'âge de sa petite-fille ?

3- Apports

Il y a une différence entre un problème et un exercice d'application. Dans un exercice d'application, on exerce des procédures connues. Dans un problème, on cherche à trouver des stratégies pour établir une procédure.

Ce n'est pas :

- ♦ Un exercice d'application
- ♦ Une question à laquelle on peut répondre en appliquant seulement une connaissance.

C'est :

- ♦ Une situation qui « résiste ».
- ♦ Une situation qui demande de réfléchir
- ♦ Une situation qui demande de choisir la connaissance mathématique que l'on va utiliser.
- ♦ Une situation qui demande d'organiser (les données, les différentes opérations, les résultats)

Les problèmes proposés en classe ont différents buts :

1. **Problèmes pour acquérir de nouvelles connaissances** ; la résolution du problème met en évidence la nécessité d'un nouvel outil mathématique : fraction, multiplication, etc
2. **Problèmes d'entraînement** : L'outil mathématique est connu. Résoudre le problème permet d'utiliser cet outil dans un contexte réel.
3. **Problèmes de réinvestissement** : les élèves ont des connaissances mathématiques. Ils modélisent une situation réelle et choisissent entre leurs connaissances ce qui leur est utile pour résoudre la situation.

Typologie des problèmes : d'après G. Vergnaud

Problèmes additifs et soustractifs

Problèmes Partie-Tout Tout est composé de 2 parties.	Recherche du tout	Dans la classe, il y a 12 garçons et 13 filles. Combien y a-t-il d'élèves ?
	Recherche d'une des parties	Dans la classe, il y a 25 élèves. Il y a 12 garçons. Combien y a-t-il de filles ?
Problèmes de transformation Un état initial subit une transformation (augmentation ou diminution) pour arriver à un état final.	Recherche de l'état final	Paul a 25 G, il en dépense 12. Combien en reste-t-il ?
	Recherche de la transformation :	Paul avait 25 G. Il lui en reste 13. Combien en a-t-il dépensé ?
	Recherche de l'état initial	Paul a dépensé 12 G. Il lui en reste 13. Combien en avait-il ?
Problèmes de comparaison Deux états différents sont comparés	Recherche de la différence	Jacques a 25 G, Pierre a 12 G. Combien Jacques a-t-il de plus que Pierre ?
	Recherche de l'un des états	Jacques a 25 G, il a 13 G de plus que Pierre. Combien de gourdes a Pierre ?

Problèmes de multiplication et de division

Problèmes de multiplication	Configuration rectangulaire Ces problèmes aident à installer la commutativité de la multiplication	Un jardinier plante 5 rangées de 11 salades. Combien a-t-il planté de salades ?
	Addition répétée Plusieurs paquets avec dans chaque paquet un nombre d'éléments identique	Un fabricant de bonbons produit 11 lots de 5 bonbons chacun. Combien a-t-il produit de bonbons ?
	N fois plus Comparaison de 2 collections dont l'une est un multiple de l'autre	Paul mesure 80. Pierre mesure 2 fois plus. Combien mesure Pierre ?

Problèmes de division	Division-partition On connaît le nombre de parts, on cherche la valeur d'une part	Un fabricant de bonbons a produit 55 bonbons. Il fait 11 lots. Combien de bonbons aura chaque lot ?
	Division-quotition On connaît la valeur d'une part, on cherche le nombre de parts	Un fabricant de bonbons a produit 55 bonbons. Il fait des lots de 5 bonbons. Combien peut-il faire de lots ?

4- Quels obstacles? Quelles difficultés?

- La **compréhension de l'énoncé** du problème présente des difficultés liées au langage :
 - ♦ le problème est en français et les élèves ne maîtrisent pas suffisamment cette langue,
 - ♦ certains mots sont inconnus des élèves (quotidien, mensuel, gain, perte)
 - ♦ les élèves connaissent les mots du problème mais leur signification précise n'est pas connue (3 fois plus, les fruits coûtent 4G chacun, 4G l'unité)
 - ♦ la situation évoquée dans le problème n'est pas connue des élèves (problèmes éloignés de leurs univers quotidien)
 - ♦ la syntaxe est difficile (repérage de la chronologie, questions très concises)

Le problème peut être écrit en créole pour les premières années. L'enseignant fait toujours reformuler le problème pour vérifier et améliorer la compréhension de ses élèves. Il le traduit ou le fait reformuler en créole si nécessaire.

Un travail est fait pour acquérir le vocabulaire et la syntaxe spécifiques des problèmes de mathématique à travers la lecture fine de plusieurs problèmes L'écriture collective ou individuelle d'énoncés de problème permet de fixer ce qui a été découvert. En 5ème AF, il est prévu l'écriture d'énoncés de problèmes en français.

- Même si l'énoncé est compris, l'élève peut avoir des difficultés à se représenter la situation du point de vue mathématique. *Il peut être utile de faire manipuler les élèves ou de leur faire mimer la situation.*
- Les élèves restent sur une représentation prototypique et ont du mal à concevoir des problèmes hors de ces représentations. *Dès le début de la scolarité, on propose tous les types de problèmes. On joue éventuellement sur les variables pour les rendre plus faciles quand le type de problème est difficile. On peut utiliser des petits nombres, simplifier la syntaxe, utiliser des univers connus des enfants.*
- Certains problèmes sont plus difficiles que d'autres. Dans les problèmes **tout-partie**, la recherche de la partie est plus difficile que la recherche du tout. Dans les problèmes de transformation, la recherche de **l'état final** est la plus facile, la recherche de **l'état initial** est la plus difficile.

La prise en compte des variables permet de travailler ces différents types de problèmes ensemble pour faciliter leur compréhension.

B – LES ETAPES DE LA RESOLUTION DE PROBLEMES – PROCEDURES PERSONNELLES – PROCEDURES EXPERTES

- ♦ Comprendre ce qu'est un problème mathématique.
- ♦ Comprendre la différence entre procédures personnelles et procédures expertes.
- ♦ Comprendre l'importance des procédures personnelles de l'élève.
- ♦ Connaître les principaux types de problèmes.
- ♦ Savoir mettre en place des séances de résolution de problèmes (séances de découverte).
- ♦ Savoir mettre en place des séances d'entraînement à la résolution de problèmes avec une différenciation.

1 – Mise en situation

Consigne : Vous allez apprendre ce que sont des procédures personnelles de résolution de problèmes. Pour cela, vous allez vous-mêmes, par groupes, résoudre un problème de la manière que vous souhaitez.

Le voici :

Un pompier est sur l'échelon du milieu d'une échelle. Le feu brûle plus ou moins fort et le pompier monte et descend sur l'échelle. Il monte 3 barreaux puis en descend 7. Il monte ensuite 6 barreaux et en descend 4. Puis il descend encore 5 barreaux et en remonte 8. Enfin, le feu se calme, il monte 12 barreaux et pénètre dans la maison. Combien de barreaux a l'échelle ?

2- Structuration par le formateur

Les procédures

Procédures personnelles

Comment avez-vous procédé ? Expliquez ce que vous avez-trouvé et quel chemin vous avez suivi pour y arriver. Dites aussi si vous avez fait des erreurs et comment vous vous en êtes aperçu.

Procédures possibles :

- ♦ Vous avez dessiné l'échelle pour mieux vous représenter la situation.
- ♦ Vous avez compté en montant et en descendant les barreaux de l'échelle.
- ♦ Vous avez dessiné une droite graduée (schématisation) en prenant le barreau du milieu comme 0, ceux du dessus comme +1, +2, etc et ceux du dessous comme -1, -2, etc.
- ♦ Vous avez fait un calcul du type : il monte 3 et descend 7, c'est comme s'il descendait 4, etc.
- ♦ Vous avez utilisé une autre procédure.

Erreurs possibles :

Solution trouvée : 13 échelons. Vous avez oublié que le pompier est au milieu de l'échelle. Il y a des barreaux au-dessus et en dessous.

Solution trouvée : 26 échelons. Vous avez oublié le barreau du milieu.

Procédure experte :

Nombre de barreaux = n

D'après l'énoncé, on peut écrire que : $n = [(3 - 7 + 6 - 4 - 5 + 8 + 12) \times 2] + 1$

Les échelons montés ou descendus sont vus comme des nombres relatifs (avec + ou -). On multiplie ce total par 2 puisque le pompier est au milieu de l'échelle (il y a autant de barreaux en-dessus qu'au dessous) et on ajoute 1 (le barreau du milieu).

Que s'est-il passé pour vous ?

- ♦ Vous avez cherché et réfléchi, chacun à votre manière, pour vous représenter le problème.
- ♦ Vous avez essayé des méthodes pour le résoudre en échangeant avec vos collègues.
- ♦ Peut-être êtes-vous arrivés à des impasses ou à des erreurs, c'est la discussion qui vous a permis d'avancer.
- ♦ Comme vous avez pu « retourner » le problème dans tous les sens, il vous est plus facile d'arriver à la solution experte ou de la comprendre si vous n'y êtes pas arrivés.
- ♦ Si on exige la solution experte tout de suite, on risque beaucoup d'échecs.

Nous allons appliquer la même démarche avec les élèves.

A quoi servent les procédures personnelles ?

- ♦ Pour avoir une représentation de la situation.
- ♦ Pour s'engager dans le problème, pour essayer avec les moyens dont on dispose.
- ♦ La solution experte n'est pas toujours accessible à l'élève.
- ♦ L'élève va plus facilement comprendre la solution experte parce qu'il a réfléchi et produit une procédure personnelle.

3- Apports

Un problème peut être résolu par des

Procédures personnelles :

Ce sont toutes les techniques que les élèves vont mettre en place pour résoudre le problème : dessins, schémas, calculs par tâtonnements, autres types de calculs (par exemple faire une addition répétée dans une situation de multiplication ou des soustractions successives dans une situation de division), etc.

La recherche de procédures personnelles se rapproche de la démarche d'investigation en sciences : les élèves réfléchissent, recherchent, testent, argumentent puis valident ou invalident des procédures.

Procédures expertes :

Ce sont les techniques les plus efficaces que les mathématiciens ont trouvées pour résoudre un type de problèmes (par exemple la division). Dans l'histoire des mathématiques, on voit qu'avant d'arriver à mettre au point ces techniques, les Humains utilisaient des techniques moins perfectionnées, proches des procédures personnelles. Ce sont les procédures personnelles qui ont servi à mettre au point les procédures expertes.

Pour travailler sur des grands nombres, les procédures expertes sont les seules qui sont utilisables. Par exemple, on peut partager équitablement 12 bonbons entre 3 enfants en les donnant un par un ou bien en faisant des petits tas qu'on égalisera. Il est par contre impossible de partager de cette manière 3745 objets entre 132 personnes. On doit recourir à une procédure experte.

SEANCE DE CLASSE 1 : DECOUVERTE d'UN TYPE DE PROBLEMES

Phase 1 : Lecture collective du problème - Le problème est écrit au tableau.

Dans un tap-tap, il y a des voyageurs. Le tap-tap s'arrête et 7 nouveaux voyageurs montent. Personne ne descend. Il y a maintenant 19 voyageurs dans le tap-tap. Combien y avait-il de voyageurs avant l'arrêt ?

L'enseignant fait lire le problème à un élève et le lit lui-même. Il cache le problème

Consigne : *Nous allons essayer de raconter le problème qui est au tableau sans le regarder pour bien le comprendre. Ce n'est pas grave si vous ne vous rappelez pas exactement des nombres. Tout à l'heure, vous pourrez le relire.*

Réponses et difficultés éventuelles des élèves :

- ♦ Ils ne se représentent pas la situation car ils cherchent surtout à se rappeler les nombres.
- ♦ Ils ne comprennent pas ce que représente les 19 voyageurs et les 7 voyageurs .
- ♦ Ils ne comprennent pas le déroulement : qui était au début, qui est monté avant , qui est monté après ?

Rôle de l'enseignant : L'enseignant guide la discussion collective pour aider à la compréhension. Il peut demander : Combien sont descendus ? Combien sont montés ? A la fin, il y en a plus ou moins qu'au début ?

Exemple de reformulation juste par les élèves (après échange) : C'est un tap-tap qui s'arrête. Il y a des voyageurs qui montent. On demande combien de voyageurs il y avait au début. Quand les élèves ont reformulé la situation, on relit le texte du problème avec les nombres.

Différenciation : Il est possible de donner le même problème à un groupe d'élèves en utilisant des nombres plus petits : 3 voyageurs montent, il y a 8 voyageurs après l'arrêt (voir le module Inclusion scolaire). Le maître ne donne aucune explication sur la manière de résoudre ce problème.

Phase 2 : Recherche individuelle

Consigne : *Vous allez maintenant chercher seuls en utilisant une feuille de brouillon. Vous pouvez utiliser la méthode que vous voulez. Vous chercherez 5 minutes seuls puis vous expliquerez ce que vous avez trouvé à votre groupe. Vous pouvez dessiner, utiliser le matériel, calculer.*

Phase 3 : Recherche par groupes

Consigne : *Vous allez maintenant vous mettre par groupe. Chacun expliquera ce qu'il a trouvé aux autres. Vous discuterez et vous vous mettrez d'accord sur une seule façon de faire. Vous expliquerez votre façon de faire sur une grande feuille par groupe avec des dessins ou des calculs, comme vous voulez.*

Déroulement de l'activité et réponses possibles :

Différentes procédures :

Dessins : Les élèves dessinent des bonshommes pour figurer les voyageurs.

Schémas : Les élèves dessinent des ronds ou des traits pour représenter les voyageurs. Ils dessinent parfois les nombres avec les dizaines et les unités comme ils ont appris en numération.

Calculs : Les élèves essaient une des formes de calcul qu'ils connaissent : addition, soustraction, addition à trou.

Erreurs possibles :

Addition des 2 nombres : De nouveaux voyageurs montent, cela peut signifier pour les élèves, qu'il faut additionner. C'est l'erreur la plus fréquente. On peut la retrouver associée à toutes les procédures.

Phase 4 : Mise en commun

Chaque groupe vient présenter au tableau sa feuille avec sa solution. Toutes les feuilles restent présentées au tableau. L'enseignant met côte à côte les feuilles des groupes qui ont utilisé la même procédure (dessins, schémas, calculs)

Puis, un élève par groupe va venir expliquer la solution trouvée et la démarche. Si plusieurs groupes ont utilisé **la même procédure, on peut interroger un seul groupe** parmi eux pour que la mise en commun ne dure pas trop longtemps.

Dans quel ordre faire passer les groupes ?

On essaiera que chaque groupe apporte **un morceau de la solution**. Pour cela, on fera passer en premier les groupes qui ont eu le plus de difficulté en valorisant ce qu'ils ont trouvé même si c'est minime. On fera discuter les procédures par le groupe-classe. Pour discuter la validité d'une procédure, l'enseignant peut demander : *Pourquoi penses-tu que c'est juste ? Pourquoi penses-tu que ce n'est pas juste ?*

Que faire si aucun groupe n'arrive au bout du problème ? (procédures fausses)

Cette phase de mise en commun va permettre de d'éclaircir des erreurs, en particulier l'erreur d'additionner les 2 nombres. Le maître ne donne pas la solution mais à la fin de cette mise en commun, il met en place une nouvelle phase de recherche par groupe qui permet généralement d'arriver au bout.

Cette nouvelle recherche peut se dérouler à la séance suivante. Dans ce cas, la synthèse sera aussi reportée à la séance suivante.

Phase 5 : Synthèse et trace écrite

L'enseignant rappelle la situation : un tap-tap avec des voyageurs qui sont montés. On cherche le nombre de voyageurs;

Il reformule les procédures possibles :

- ♦ On peut prendre des cailloux qui représentent les voyageurs à l'arrivée et mettre de côté les voyageurs qui sont montés. Cela donne les voyageurs du début. On peut le vérifier en « faisant monter » de nouveau les voyageurs dans le tap-tap et en constatant qu'on obtient 19.
- ♦ On peut dessiner les voyageurs à l'arrivée et entourer ceux qui sont montés pour voir lesquels étaient là au début.
- ♦ On peut faire une addition à trou : $\underline{\quad} + 7 = 19$ $12 + 7 = 19$, il y avait 12 voyageurs.
- ♦ On peut faire une soustraction : $19 - 7 = 12$, il y avait 12 voyageurs.

Trace écrite :

Chaque élève dessine la représentation du problème et choisit une opération qu'il écrit : addition à trou ou soustraction.

SEANCE DE CLASSE 2 : SEANCE DIFFERENCIEE D'ENTRAINEMENT

Chaque séance d'apprentissage sera suivie de séance d'entraînement pour fixer les procédures découvertes.

Objectifs de la séance: Utiliser les procédures découvertes.

Les objectifs pourront être différents pour cette séance selon les élèves.

- ♦ **Groupe-classe :** Utiliser les procédures découvertes. Tenter d'utiliser une autre procédure. Difficulté plus ou moins grande des problèmes selon le niveau des élèves.

- ♦ **Elèves en difficulté :** Terminer la découverte et la compréhension d'au moins une procédure.

Organisation de la classe : L'enseignant constitue autour de lui un groupe avec les élèves en difficulté qu'il a repérés au cours de la séance d'apprentissage. Les autres élèves sont regroupés par 2 élèves de même niveau.

Matériel : pour chaque élève, papier et crayon

A disposition dans la classe : matériel pour compter (cailloux ou bouchons)

Introduction de la séance :

L'enseignant rappelle la séance précédente. Il fait reformuler à des élèves le sujet du problème et les différents moyens d'arriver à la solution. Il explique que les problèmes d'aujourd'hui parleront d'autre chose mais pourront se résoudre de la même façon. Il y aura 3 niveaux de problèmes différents : niveau 1 (avec l'enseignant), niveau 2 et niveau 3.

Déroulement de la séance :

- ♦ **Niveau 2 ou 3 :** l'enseignant donne plusieurs problèmes. Les élèves vont avancer par 2 à leur rythme. Quand ils ont fini tous les deux un problème, ils comparent leurs réponses et échangent. Ils peuvent se corriger en discutant et en prenant conscience de leurs erreurs. Ils doivent trouver le même résultat même s'ils n'ont pas utilisé la même procédure. Ils doivent s'expliquer l'un à l'autre leurs procédures. Ils peuvent utiliser librement le matériel s'ils en ont besoin pour compter ou pour valider une solution.

Pour le niveau 2, on utilisera des nombres plus petits que pour le niveau 3;

- ♦ **Groupe avec l'enseignant :** Les élèves sont regroupés avec l'enseignant près du tableau ou près d'une feuille au mur. Le problème est effectué collectivement. Les élèves participent et proposent des réponses : c'est le petit groupe qui discute et valide avec l'aide de l'enseignant. Pour ce groupe, on peut donner un problème avec de tous petits nombres et les faire manipuler les quantités pour qu'ils comprennent bien la notion mathématique.

SEANCE DE CLASSE 3 : SEANCE DIFFERENCIEE DE REINVESTISSEMENT

Toutes les 5 ou 6 séances de problèmes, on fera une séance qui va mêler tous les types de problèmes étudiés.

Objectifs de la séance : Comprendre à quelle situation ces problèmes se rapportent. Choisir la bonne opération.

Organisation de la classe : Les élèves sont regroupés par 2 élèves de même niveau. Niveau 1, niveau 2, niveau 3 (du plus facile au plus difficile). Les nombres choisis seront de plus en plus grands. Le niveau 3 aura des problèmes avec plusieurs opérations sans questions intermédiaires.

Matériel : pour chaque élève, papier et crayon

A disposition dans la classe : matériel pour compter (cailloux ou bouchons)

Déroulement :

Pour chaque niveau (1, 2 ou 3), l'enseignant donne plusieurs problèmes. Ces problèmes peuvent être de tous les types. L'enseignant ne donne pas d'indication aux élèves sur le type de problème. Les élèves vont avancer par 2 à leur rythme. Quand ils ont fini tous les deux un problème, ils comparent leurs réponses et échangent. S'ils sont en difficulté, ils peuvent travailler ensemble. Ils peuvent se corriger en discutant et en prenant conscience de leurs erreurs. Ils doivent trouver le même résultat même s'ils n'ont pas utilisé la même procédure. Ils doivent s'expliquer l'un à l'autre leurs procédures. Ils peuvent utiliser librement le matériel s'ils en ont besoin pour compter ou pour valider une solution.

4) Activités de classe

ACTIVITE 32 : LES BOITES DE CAILLOUX

1ère et 2ème AF

Objectifs : Utiliser ses connaissances mathématiques dans une situation.

Trouver une procédure personnelle pour résoudre un problème.

Expliquer sa démarche.

Pour cet exemple : Comprendre une situation de multiplication (2ème année) ou d'addition réitérée (1ère année)

Attention : Cette séance ne sert pas à apprendre la multiplication. Elle sert avant tout à apprendre aux élèves à chercher et à utiliser leurs connaissances. Elle peut être effectuée avant ou après l'introduction de la multiplication, en 1ère ou en 2ème année.

Matériel : Pour la classe : Jeu des boîtes de cailloux : Les boîtes peuvent être remplacées par des enveloppes.

- ♦ 10 enveloppes contenant 3 cailloux chacune avec marqué dessus 3
- ♦ 10 enveloppes contenant 4 cailloux chacune avec marqué dessus 4
- ♦ 10 enveloppes contenant 5 cailloux chacune avec marqué dessus 5
- ♦ Un paquet de 3 cartes coloriées en bleu avec les nombres :
- ♦ Un paquet de 3 cartes coloriées en rouge avec les nombres :

Par groupe d'élèves : papier brouillon, crayons, une grande feuille (facultatif) sinon on utilise le tableau

SEANCE 1 :

ETAPE 1 :

Recommandation : L'enseignant doit répéter plusieurs fois et lentement les consignes et faire reformuler à quelques élèves avec leurs propres mots.

Le jeu des boîtes de cailloux : Chaque joueur tire une carte bleue et une carte rouge. Les cartes bleues représentent le nombre de boîtes gagnées. Les cartes rouges représentent la quantité de cailloux contenue dans chaque boîte. Par exemple, un joueur qui tire une carte 3 bleue et une carte 4 rouge a gagné 3 boîtes de 4 jetons chacune. Celui qui a le plus de cailloux a gagné.

Explication du jeu

Le maître place les boîtes devant lui et explique le jeu. Il ouvre quelques boîtes pour faire constater leur contenu aux élèves. Il fait jouer quelques groupes de 2 élèves en leur demandant d'ouvrir les boîtes gagnées, de vider le contenu et de compter combien il y en a. Le nombre maximum de cailloux que l'on peut obtenir est de 25 (5 boîtes de 5), les élèves de 1ère année peuvent donc jouer.

Consigne : Nous allons jouer à un jeu. Dans ces boîtes, il y a des cailloux, il y a des boîtes de 3 cailloux, de 4 cailloux, de 5 cailloux. Regardez. (Il ouvre les boîtes.) Sur la boîte, il y a écrit combien de cailloux il y a dedans. Il y a écrit 3 ou 4 ou 5.

Il y a aussi des cartes : les cartes bleues, c'est pour dire combien de boîtes on gagne, les cartes rouges, c'est pour dire combien de cailloux, il y a dans les boîtes qu'on gagne. Nous allons essayer.

Le maître fait venir un élève, lui fait tirer une carte bleue et une carte rouge. Tu as tiré un 4 bleu et un 3 rouge : tu as gagné 4 boîtes de 3 cailloux.

Maintenant, nous allons jouer avec deux élèves. Le maître fait venir deux élèves, il leur fait tirer les cartes, prendre les boîtes, vider le contenu et compter pour savoir qui a gagné. Il fait passer quelques groupes.

Problème

Le maître fait jouer un groupe de 2 élèves mais, au moment d'ouvrir les boîtes, il les arrête.

Consigne : *Nous n'allons pas ouvrir les boîtes. Vous allez essayer de me dire qui a gagné en réfléchissant par groupes de 4. Vous pouvez calculer ou dessiner pour trouver la réponse. Si vous n'y arrivez pas, vous pouvez prendre d'autres cailloux pour vous aider. Quand vous aurez fini, vous expliquerez comment vous avez fait sur une grande feuille et vous viendrez l'expliquer au tableau.*

Il est préférable que les élèves ne soient pas plus de 4 ensemble pour que chacun puisse chercher et manipuler. S'il y a trop de groupes (plus de 50 élèves) le professeur peut choisir de ne pas faire passer tous les groupes. Par contre, il essaie d'avoir toutes les procédures différentes. Il s'organise pour que les autres groupes passent la fois suivante.

Les élèves se groupent par 4 pour réaliser la tâche : il s'agit de déterminer les gains de chaque élève et de les comparer. Supposons que Pierre ait 4 boîtes de 3 jetons et Paul ait 3 boîtes de 5 jetons.

- ♦ **Procédures fausses :** Certains élèves peuvent penser que Pierre a davantage de boîtes (c'est ce qui est visible) et donc qu'il a forcément plus de cailloux.
- ♦ **Procédure avec des objets :** Les élèves vont chercher des cailloux, ils refont la situation sur leur table en faisant des tas à la place de boîtes. Puis, ils recomptent les collections complètes et les comparent.
- ♦ **Procédures avec des dessins :** Les élèves peuvent dessiner les boîtes avec des cailloux dedans et recompter.
- ♦ **Procédure d'addition :** Les élèves écrivent $3+3+3+3 = 12$ et $5+5+5 = 15$
- ♦ **Procédure multiplicative :** Les élèves de 2ème année qui ont déjà étudié la multiplication pour remplacer l'addition répétée et qui connaissent les tables de 3, 4 et 5 peuvent repérer cette situation comme relevant de la multiplication.

Le professeur laisse les élèves chercher même s'ils se trompent. S'ils se bloquent, il peut leur proposer d'utiliser le dessin ou des objets. Pendant ce temps, il observe les procédures de ses élèves.

Temps : 20 minutes

ETAPE 2

Mise en commun

Consigne : Vous allez maintenant venir au tableau expliquer ce que vous avez trouvé. Le maître fait passer en premier les groupes qui ont trouvé **la procédure la moins experte**, c'est à dire l'utilisation ou le dessin des objets . Toute la classe va pouvoir ainsi se représenter la situation. Cela servira de **validation** pour les autres groupes. Il peut tout de même y avoir des erreurs de groupement. Le maître fait vérifier par la classe. Il remercie le groupe pour son travail même s'il y a des erreurs en disant que **l'erreur a permis de mieux comprendre et de progresser**. Puis, il fait passer les groupes ayant trouvé les autres procédures. Il encourage les élèves de la classe à donner leur avis et à **poser des questions** s'ils ne comprennent pas. Il valorise ce qui a été trouvé. Il **reformule** après les élèves du groupe pour que la formulation soit plus claire pour toute la classe.

Par exemple, après un groupe qui a travaillé avec la procédure additive, il dit :

Vous avez raison, il y a 3 cailloux dans cette boîte et encore 3 cailloux et encore 3 et encore 3. On écrit $3 + 3 + 3 + 3 = 12$

S'il n'y a que des élèves de première année dans la classe, on peut en rester à cette procédure.

Procédure experte : multiplication

- ♦ Si la classe a déjà étudié la multiplication, le maître félicite les élèves qui ont pensé à cette procédure en disant : *C'est vrai, on peut aussi écrire 4 fois 3 car il y a 4 boîtes de 3, c'est pareil d'écrire 4×3 et d'écrire $3 + 3 + 3 + 3$* . Il écrit les opérations au tableau.
- ♦ Si la classe n'a pas encore étudié la multiplication, le maître se sert de cette situation pour introduire la multiplication. Mais cela doit faire l'objet d'une autre séance comprenant des manipulations d'objets par tous les élèves. Le maître menera cette séance le lendemain en rappelant ce qui a été fait la veille. Le jour même, il dit seulement :

- Il y a une autre manière d'écrire une addition quand on additionne toujours le même nombre. Je vous l'apprendrai demain.

Le maître termine la séance en faisant ouvrir les boîtes et recompter le contenu pour valider les solutions qui ont été trouvées.

A la fin de la mise en commun, le maître laisse au tableau ou écrit sur une affiche les différentes procédures.

Temps de la mise en commun : 30 minutes

SEANCE 2 : Entraînement

Les élèves vont s'entraîner à résoudre des problèmes. L'objectif est qu'ils se familiarisent avec des procédures un peu plus expertes.

Le maître les regroupe par 2 en essayant d'avoir des élèves de niveau comparable. Il propose plusieurs problèmes de multiplication avec des nombres plus ou moins grands. Il annonce aux élèves que le but est de s'entraîner à faire plusieurs méthodes car il y a des méthodes plus pratiques que les autres suivant les situations.

Les élèves ont toujours le choix de leurs méthodes mais pour chaque problème, ils doivent utiliser deux méthodes différentes et vérifier qu'ils arrivent bien au même résultat.

Consigne : *Aujourd'hui, nous allons résoudre des problèmes. Vous serez par groupe de 2. Vous allez choisir un problème et le résoudre. Vous le ferez de deux façons différentes à chaque fois. Si vous trouvez un résultat différent, c'est que vous vous êtes trompés, il faudra réessayer.*

Si vous avez vraiment du mal, vous essayez d'abord avec les objets et vous choisissez des problèmes avec des petits nombres.

Si vous trouvez le même résultat pour les deux méthodes, vous venez me montrer ou vous venez montrer à (le maître peut désigner des élèves experts) pour vérification puis vous choisissez un autre problème.

Rôle du maître : Pendant cette séance, le maître va laisser agir les élèves en autonomie. Il observe les groupes, il peut faire remarquer une erreur mais il laisse chercher les enfants. Si des groupes sont en difficulté, il les encourage à dessiner ou à prendre des objets. Il est inutile d'essayer d'expliquer une procédure trop compliquée pour un élève. Cela ne fait que l'embrouiller. Il faut qu'il s'entraîne à comprendre la procédure juste un peu plus compliquée que la sienne. Certains élèves auront besoin d'utiliser longtemps les objets.

Autres séances – Prolongements

Le maître fait alterner les séances où toute la classe va travailler ensemble sur un seul problème et les séances d'entraînement. Pourquoi ?

Les séances avec toute la classe vont permettre aux élèves de découvrir de nouvelles procédures. Au fur et à mesure qu'ils progressent, ils voient d'abord leurs camarades utiliser ces procédures. Ils commencent à les comprendre avant de se lancer à les réaliser. Ils voient et comprennent le rapport avec la situation réelle puisqu'ils peuvent utiliser leurs procédures personnelles.

Petit à petit, dans **les séances d'entraînement**, ils vont essayer d'utiliser des nouvelles procédures. Ils sont libres de leur temps et avancent à leur rythme. Ils prennent de la vitesse et de l'aisance dans leur façon de faire.

Dans les séances collectives, ils prennent l'habitude d'expliquer leur démarche à toute la classe.

Dans les séances par 2, ils travaillent à leur niveau avec un camarade.

ACTIVITE 33 : LES OEUFS

3ème et 4ème AF

Objectifs : Utiliser ses connaissances mathématiques dans une situation.
Trouver une procédure personnelle pour résoudre un problème.
Expliquer sa démarche aux autres élèves.

Pour cet exemple : Comprendre une situation de multiplication à trou (3ème année) ou de division (4ème année)

Matériel : Pour chaque groupe d'élève : papier brouillon, crayons, une grande feuille de papier (facultatif). Dans la classe, à disposition des élèves : divers objets (cailloux, boîtes, etc..)

Attention : Cette séance ne sert pas à apprendre la division. Elle sert avant tout à apprendre aux élèves à chercher et à utiliser leurs connaissances. Elle peut être effectuée avant ou après l'introduction de la division, en 3ème ou en 4ème année.

Déroulement :

SEANCE 1 :

ETAPE 1 :

Le professeur propose une situation-problème : *Combien de boîtes de 6 oeufs peut-on remplir avec 82 oeufs ?* Il écrit le texte du problème au tableau et le fait lire à haute voix. Il fait reformuler le problème à quelques élèves (avec leurs mots) pour s'assurer que tous ont bien compris ce qu'on leur demande. Pour cela, il dit à l'élève : *Explique le problème à tes camarades avec tes mots à toi.*

Consigne : *Vous allez résoudre ce problème. Vous vous mettez par groupes de 4 et vous prenez une feuille de brouillon. Vous pouvez utiliser la méthode que vous voulez, vous pouvez calculer, dessiner, ou vous servir d'objets. Quand vous aurez fini, vous expliquerez comment vous avez fait sur une grande feuille. Vous recopierez vos dessins ou vos calculs. Puis chaque groupe viendra expliquer au tableau.*

Il est préférable que les élèves ne soient pas plus de 4 ensemble pour que chacun puisse chercher et manipuler et qu'ils puissent parler à voix basse pour essayer de trouver une solution et l'expliquer. S'il y a trop de groupes (plus de 50 élèves), le professeur peut choisir de ne pas faire passer tous les groupes. Mais il essaie d'avoir toutes les procédures différentes qu'il a pu observer et il s'organise pour que les autres groupes passent la fois suivante.

Les élèves réalisent la tâche. Ils vont utiliser **des procédures différentes**.

Le nombre du dividende (82) est assez grand. Cela rend l'utilisation d'objets ou le dessin difficile mais ce n'est pas impossible. Les élèves vont faire des paquets de 6 puis compter le nombre de paquets.

- ♦ **Procédure utilisant l'addition :** $6 + 6 = 12$ $12 + 6 = 18$ Les élèves avancent en rajoutant à chaque fois 6 puis ils comptent combien de 6 ils ont ajouté. Ils ont souvent des difficultés pour la dernière boîte. Le résultat est-il 13 ou 14 ? Il faut revenir à la question posée : combien de boîtes peut-on remplir ?

- ♦ **Autre procédure utilisant l'addition :** $6+6+6+6 = 24$ $6+6+6+6=24$ $6+6+6+6=24$
 $24+24+24=72$ $72+6=78$ $78+6=84$ Il faut recompter les 6.

- ♦ **Procédure multiplicative par essais et erreurs :**

$3 \times 6=18$ ce n'est pas assez, $10 \times 6 = 60$, ce n'est pas assez, $15 \times 6 = 90$, c'est trop, $13 \times 6 = 78$, ce n'est pas assez, $14 \times 6 = 84$, c'est trop . Là aussi entre 13×6 et 14×6 , il peut y avoir une confusion.

- ♦ **Procédure soustractive :** $82-6 = 76$ $76 - 6 = 70$ $70 - 6 = 64$ etc....

- ♦ **Procédure experte :** C'est la division avec la disposition pratique. Certains élèves peuvent la proposer.

Le professeur laisse les élèves chercher même s'ils se trompent. S'ils se bloquent, il peut leur proposer d'utiliser le dessin ou des objets. Pendant ce temps, il observe les procédures de ses élèves.

Temps : 20 minutes

ETAPE 2

Mise en commun

Consigne : *Vous allez maintenant venir au tableau expliquer ce que vous avez trouvé.* Le maître fait passer en premier les groupes qui ont trouvé **la procédure la moins experte**, c'est à dire l'utilisation ou la représentation (dessin) des objets . Toute la classe va pouvoir ainsi se représenter la situation. Cela servira de **validation** pour les autres groupes. Il peut tout de même y avoir des erreurs de groupement. Le maître fait vérifier par la classe. Il remercie le groupe pour son travail même s'il y a des erreurs en disant que **l'erreur a permis de mieux comprendre** et d'avancer.

Puis, il fait passer les groupes ayant trouvé les autres procédures. Il encourage les élèves de la classe à donner leur avis et à poser des questions s'ils ne comprennent pas. Il valorise ce qui a été trouvé. Il **reformule** après les élèves du groupe pour que la formulation soit plus claire pour toute la classe. Par exemple, après un groupe qui a travaillé avec la procédure additive, il peut dire :

- Oui, vous avez raison, on peut ajouter les oeufs qu'on met dans les boîtes. J'ai 6 oeufs et encore 6 oeufs, et encore 6 oeufs. Je vais ajouter des groupes de 6 oeufs jusqu'à ce que j'arrive très près de 82. Là, je ne peux plus ajouter 6 oeufs parce que je n'en ai plus assez. Je vais compter le nombre de fois où j'ai ajouté 6 oeufs. En parlant, il montre les dessins ou se sert des objets pour que les élèves comprennent le rapport entre les nombres écrits et les quantités d'oeufs.

Après un groupe qui a travaillé avec la multiplication, il peut, par exemple, dire :

- Ce groupe a fait aussi des paquets de 6 oeufs. Mais il n'a pas ajouté paquet après paquet. Il a essayé de voir combien ça fait avec par exemple 7 paquets . Si ça ne fait pas assez, il augmente le nombre de paquets jusqu'à ce que ça fasse trop pour arriver au nombre d'oeufs juste avant 82. C'est comme si on cherchait dans la table de 6 un nombre juste avant 82. La table de 6 ne s'arrête pas à 6×10 comme vous l'avez apprise, elle peut continuer à l'infini.

Pour la procédure soustractive, il dit :

- Là, ils ont pris tous les oeufs et ils en ont enlevé 6, ça leur fait un paquet de 6 puis ils ont encore enlevé 6 puis encore 6 jusqu'à ce qu'il en reste moins de 6. A la fin, ils ont compté combien de fois on a enlevé 6.

Procédure experte : division posée : Certains élèves peuvent avoir proposé cette procédure. C'est la plus difficile : elle utilise la procédure soustractive en séparant les dizaines et les unités. On peut l'expliquer avec le matériel de numération :

$\begin{array}{r} 82 \quad 6 \\ -6 \quad \overline{)1} \\ 2 \end{array}$	Je divise 8 dizaines par 6, je fais 6 paquets J'écris 1 au quotient car dans chacun des 6 paquets, Je peux mettre une dizaine. Il me reste 2 dizaines.
--	---

$\begin{array}{r} 82 \quad 6 \\ -6 \quad \overline{)1} \\ 22 \end{array}$	Je transforme les 2 dizaines en unités : cela me fait 20 unités. Je rajoute les 2 unités de 82, j'ai 22 unités à partager
---	---

8 2	6	Avec 22 unités, j'aurai 3 unités à partager, j'ai donc 13 au quotient
-6	13	(1 dizaine et 3 unités.)
2 2		Je retire les 3 fois 6, c'est à dire 18 oeufs aux 22 oeufs qui restaient
-1 8		Il me reste donc 4 oeufs et j'ai rempli 13 boîtes.
4		

A la fin de la mise en commun, le maître laisse au tableau ou écrit sur une affiche les différentes procédures.

Attention : Cette dernière procédure est compliquée. Elle ne doit pas être enseignée trop tôt aux élèves. Pour être bien comprise, il faudra donner la possibilité aux élèves de manipuler réellement du matériel représentant les dizaines et les unités et de faire les échanges entre dizaines et unités. Cela fait l'objet d'une autre séance.

- ♦ Si la classe a déjà vu cette technique, l'enseignant rappelle ce qu'on a fait avec les objets en réexpliquant au tableau.
- ♦ Si la classe n'a pas encore vu cette technique, on pourra l'introduire après plusieurs séances de problèmes où la majorité des élèves aura réussi et compris la procédure soustractive.
- ♦ Pour introduire la division, il faudra aussi utiliser des situations de partage, par exemple 82 bonbons à partager entre 6 enfants pour que les élèves voient qu'on utilise la même opération même si ce n'est pas la même situation.

SEANCE 2 : Entraînement

Le lendemain, les élèves vont s'entraîner à résoudre des problèmes.

L'objectif est qu'ils se familiarisent avec des **procédures un peu plus expertes**.

Le maître les regroupe par 2 en essayant d'avoir des élèves de niveau comparable. Il propose plusieurs problèmes de division avec des nombres plus ou moins grands. Il annonce aux élèves que le but est de s'entraîner à faire plusieurs méthodes car il y a des méthodes plus pratiques que les autres suivant les situations.

Les élèves ont toujours le choix de leurs méthodes mais pour chaque problème, ils doivent utiliser deux méthodes différentes et vérifier qu'ils arrivent bien au même résultat.

Consigne : Aujourd'hui, nous allons résoudre des problèmes. Vous serez par groupe de 2. Vous allez choisir un problème et le résoudre. Vous le ferez de deux façons différentes à chaque fois. Si vous trouvez un résultat différent, c'est que vous vous êtes trompés, il faudra réessayer.

Si vous avez vraiment du mal, vous essayez d'abord avec les objets et vous choisissez des problèmes avec des petits nombres.

Si vous trouvez le même résultat pour les deux méthodes, vous venez me montrer ou vous venez montrer à (le maître peut désigner des élèves experts par exemple en classe 4 dans une classe multigrade) pour vérification puis vous choisirez un autre problème.

Rôle du maître : Pendant cette séance, le maître va laisser agir les élèves en autonomie. Il observe les groupes, il peut faire remarquer une erreur mais il laisse chercher les enfants. Si des groupes sont en difficulté, il les encourage à dessiner ou à prendre des objets pour mieux visualiser la situation. Il est inutile d'essayer d'expliquer une procédure trop compliquée pour

un élève. Cela ne fait que l'embrouiller. Il faut qu'il s'entraîne à comprendre la procédure juste un peu plus compliquée que la sienne. Certains élèves auront besoin d'utiliser longtemps les objets, ce n'est pas grave, l'important est qu'ils progressent à leur rythme en comprenant toujours ce qu'ils font.

Autres séances – Prolongements

Le maître fait alterner les séances où toute la classe va travailler ensemble sur un seul problème et les séances d'entraînement. Pourquoi ? Les séances avec toute la classe vont permettre aux élèves de découvrir de nouvelles procédures. Au fur et à mesure qu'ils progressent, ils voient d'abord leurs camarades utiliser ces procédures. Ils commencent à les comprendre avant de se lancer à les réaliser. Ils voient et comprennent le rapport avec la situation réelle puisqu'ils peuvent toujours utiliser leurs procédures personnelles.

Petit à petit, **dans les séances d'entraînement**, ils vont essayer d'utiliser des nouvelles procédures que certains de leurs camarades ont déjà utilisées. Ils sont libres de leur temps et avancent à leur rythme. Ils prennent de la vitesse et de l'aisance dans leur façon de faire et comprennent toujours ce qu'ils sont en train de faire.

Dans les séances collectives, ils prennent l'habitude d'expliquer leur démarche à toute la classe (ils utilisent leurs mots, progressent en expression orale et gagnent de l'assurance). Dans les séances par 2, ils travaillent à leur niveau avec un camarade qui a à peu près le même niveau qu'eux mais comme l'enseignant les oblige à utiliser à chaque fois au moins deux procédures différentes, ils progressent petit à petit.

Pour résoudre un problème, il est important d'organiser sa démarche avant de commencer à faire des calculs. On peut procéder de la manière suivante :

- ♦ On note ce que l'on cherche.
- ♦ On note ce que l'on sait ou ce que l'on connaît.
- ♦ On note dans l'ordre les différentes étapes de la résolution du problème.
- ♦ On effectue les calculs.
- ♦ On vérifie que la réponse est possible et l'on rédige la solution.

Activité 1

Consigne : Jean Baptiste, pour fêter l'anniversaire de sa fille Nicole, veut acheter 3 sachets de bonbons au chocolat à 10 gourdes le sachet, 7 sachets de chee co à 7 gourdes le sachet, 8 bouteilles de cola à 15 gourdes la bouteille et un morceau de glace pour 35 gourdes. Il a 240 gourdes en poche.

Jean Baptiste, a-t-il assez d'argent pour fêter l'anniversaire de Nicole ?

Mise en œuvre

On ne peut pas répondre directement à la question posée : « Jean Baptiste a-t-il assez d'argent pour fêter l'anniversaire de Nicole ? ».

- ♦ Il faut d'abord calculer le prix de tous les achats et, pour cela, se demander Combien coûtent 3 sachets de bonbons au chocolat à 10 gourdes le sachet ?
- ♦ Combien coûtent 7 sachets de chee co à 7 gourdes le sachet ?
- ♦ Combien coûtent 8 bouteilles de cola à 15 gourdes la bouteille ?
- ♦ Combien coûtent tous les produits ?

Après avoir déterminé le montant total des achats, on sera à même de répondre à la question grâce à une comparaison entre ce que Jean Baptiste a en poche et le montant des achats.

ACTIVITE 34 : PROPORTIONNALITE

5ème et 6ème AF

Objectifs : Découvrir la situation de proportionnalité

Matériel : Des bandes de papier de couleur de 5 cm de long. Pour chaque groupe d'élève : papier brouillon, crayons, une grande feuille de papier

Déroulement :

SEANCE 1 : Utilisation de la linéarité

L'enseignant a préparé des bandes de papier de couleur de la même longueur. Il les présente à la classe et précise qu'elles ont toutes la même longueur. Il met bout à bout 10 bandes, fait vérifier le nombre de bandes par un élève puis fait mesurer la longueur obtenue par un autre élève. La longueur totale est de 50 cm. Il demande ensuite aux élèves par groupes de déterminer la longueur de 5 bandes, de 20 bandes, de 30 bandes.

Il est important d'insister sur le fait que toutes les bandes ont la même longueur. Dans la situation de proportionnalité, chaque unité va être associée à la même valeur.

L'activité se déroule suivant la structure des séances de résolution de problèmes : recherche par groupe, mise en commun, synthèse. Les élèves calculent d'abord les longueurs demandées puis vérifient ce qu'ils ont trouvé de façon pratique en mettant les bandes bout à bout.

Dans cette activité, les élèves vont découvrir les propriétés de linéarité en utilisant leurs propres raisonnements : 5 bandes, c'est la moitié de 10 bandes donc la longueur de 5 bandes sera la moitié de la longueur de 10 bandes. La manipulation de cette propriété va être très importante pour saisir le sens de la proportionnalité. Les nombres choisis (multiples les uns des autres) induisent le recours à cette propriété. A la fin de la séance, l'enseignant met en évidence ce qui a été découvert.

Exercice de réinvestissement : 20 cahiers coûtent 400 G. Quel est le prix de 5 cahiers, 10 cahiers, 40 cahiers ? L'enseignant précise que chaque cahier coûte toujours le même prix. Il n'y a pas d'économie si on en achète plus.

C'est important de différencier la situation de proportionnalité de la situation de vente par lots.

SEANCE 2: Utilisation de la linéarité. Tableau de proportionnalité

L'enseignant reprend la situation des cahiers. : 20 cahiers coûtent 400G. Il pose des questions avec des nombres qui ne sont pas multiples ou diviseurs de 20. Combien coûtent 30 cahiers ? 15 cahiers ? 45 cahiers ? 3 cahiers ?

Cette situation peut être résolue de plusieurs manières. On laissera d'abord les élèves chercher par groupes et proposer leurs solutions.

1) Utilisation de combinaisons linéaires : par exemple je calcule le prix de 10 cahiers et je l'ajoute au prix de 20 cahiers. Pour 15 cahiers, je calcule le prix de 10 et de 5 et je les ajoute

ou bien je divise par 2 le prix de 30. Il est intéressant de recenser toutes les méthodes utilisées par les élèves et de les laisser s'exprimer car ils comprendront beaucoup mieux le concept de proportionnalité.

2) Passage par l'unité : 20 cahiers coûtent 400G, donc 1 cahier coûte 20G donc 3 cahiers coûtent 60G.

3) L'enseignant peut proposer ensuite d'organiser tous ces résultats dans un tableau (tableau de proportionnalité)

4) Activité de réinvestissement-évaluation

Par groupe, les élèves-maîtres vont choisir un niveau de classe, et vont préparer une séquence de problèmes comprenant une séance de découverte avec toute la classe et des séances d'entraînement sur une même notion.

ANNEXE : Le matériel pour faire des mathématiques

Les situations-problèmes nécessitent très souvent l'emploi de matériel pour manipuler, expérimenter, valider, représenter, s'entraîner. Ce matériel ne doit pas seulement être présenté aux élèves mais ce sont eux qui doivent pouvoir réaliser, seuls, en binômes ou en groupes, les manipulations.

Pour cela, le matériel doit être en quantité suffisante, déjà prêt dans la salle de classe. Le temps de formation peut être un temps pendant lequel l'étudiant- maître va commencer à rassembler et préparer ce matériel. On fera largement appel aux matériaux de récupération ou de la nature pour leur coût inexistant. Les enfants, sollicités, apportent volontiers ce type de matériaux. Cela peut aider à les motiver pour prendre en charge leur propre enseignement.

Matériel de numération : Tous les petits objets peuvent devenir matériel de numération. Il suffit qu'on décide qu'un type d'objets (par exemple cailloux) représentera les unités, un autre (capsules) les dizaines, etc.

Matériel d'échanges : cailloux, capsules de couleurs différentes, graines... L'emploi de graines comestibles (nourriture) peut poser des problèmes. On peut demander aux élèves d'apporter d'autres types de graines qu'ils vont ramasser dans la nature ;

Matériel de groupements : Il peut être intéressant de grouper les unités en paquet et de pouvoir les défaire (l'élève voit encore les unités regroupées, c'est moins abstrait). On peut utiliser des bâchettes, des pailles, des allumettes regroupées avec une ficelle ou un élastique.

Matériel de mesure : Longueur : bandes de papier (peut récupérer auprès d'administrations des vieux listings écrits à découper), morceaux de bois, ficelles, laines, allumettes, etc.

Capacités : tous récipients : bassines, bouteilles en plastique, verre en plastique, bouteilles de shampoing

Volumes et solides : emballages de carton ou boîtes de conserve.

Géométrie : Les boîtes de carton vides (boîtes alimentaires) fournissent du carton pour tracer et découper des figures qui peuvent servir de gabarit.

- ♦ Gabarit d'angle
- ♦ Classement de figures
- ♦ Classement d'angles.
- ♦ Une ficelle tendue attachée à une punaise d'un côté, à un crayon ou à une craie de l'autre peut servir de compas éventuellement de très grande taille.
- ♦ Cartes et étiquettes pour représentations du nombre, calculs divers, exercices d'entraînement

Il est important que les élèves puissent manipuler diverses représentations des nombres (chapitre sur la numération). Les activités proposées demandent souvent un matériel constitué de cartes. Le calcul mental utilise aussi des cartes questions-réponses. Cela permet aussi que les élèves s'entraînent en autonomie pendant que le maître travaille avec un petit groupe.

Ces cartes peuvent être réalisées sur le verso de cartons d'emballages. On peut les faire réaliser aux élèves en accompagnant soigneusement cette réalisation pour que les cartes restent lisibles en particulier pour les élèves les plus jeunes.

Faire tracer les cartes à découper après mesure et à la règle. Faire écrire le nombre ou le dessin au crayon avant de l'écrire au stylo et faire valider la bonne écriture par le maître.

BIBLIOGRAPHIE

Pour approfondir les notions théoriques

- ♦ BROUSSEAU G. (1998) "La théorie des situations didactiques". Recueil de textes de Didactique des mathématiques 1970-1990" présentés par M. COOPER et N. BALACHEFF, Rosamund SUTHERLAND et Virginia WARFIELD. (La pensée sauvage, Grenoble)
- ♦ G.BROUSSEAU. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques, in N. Bednarz et C. Garnier (Eds): CONSTRUCTION DES SAVOIRS. pp 41-63. CIRADE, Agence d'arc. Canada.
- ♦ G.BROUSSEAU. (1989). Obstacles épistémologiques, conflits socio-cognitifs et ingénierie didactique., in N. Bednarz et C. Garnier (Eds): CONSTRUCTION DES SAVOIRS. pp 277-289. CIRADE. Agence d'arc. Canada.
- ♦ VERGNAUD G. (2000) Une activité opératoire entre sens commun et analyse scientifique Cahiers pédagogiques (Les représentations mentales). Numéro hors série, septembre 2000, 24-26.
- ♦ Un article de Roland Charnay :
<http://www.cafepedagogique.net/lesdossiers/Pages/2013/GFENAvril02.aspx>

Pour des situations d'enseignement-apprentissage

- ♦ Apprentissages numériques et résolutions de problèmes HATIER-ERMEL –CP, CE1, CE2, CM1, CM2
- ♦ Apprentissages géométriques et résolutions de problèmes HATIER-ERMEL –Cycle 3
- ♦ Document d'accompagnement des programmes –CNDP -2003 (téléchargeable <http://www2.cndp.fr/archivage/valid/68718/68718-10580-14939.pdf>)
- ♦ F.BOULE (2012) Le calcul mental au quotidien – CRDP de Bourgogne

SITOGRAPHIE

- ♦ Le site de Guy Brousseau : <http://guy-brousseau.com>
- ♦ Un site de téléformation en mathématiques : Apprendre les mathématiques www.uvp5.univ-paris5.fr/TFM
- ♦ Revue N : articles théoriques et situations d'apprentissage : http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/
- ♦ Le matou matheux : Un site pour travailler en ligne avec les élèves : <http://matoumatheux.rennes.fr/accueilniveaux/accueilFrance.htm>